Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 19.04.2011

Abgabe: 29.04.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 01

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen

(a) $\| \|_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x_1| + |x_2|$

(b) $\| \|_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

(c) $\| \|_\infty : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \max\{|x_1|, |x_2|\}$

Normen auf dem $\mathbb{R}^2$ sind, und skizzieren Sie jeweils die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 :\ \|x\| \leq 1\}$. (Hinweis: Diese Abbildungen sind bei entsprechender Definition auch Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$)

Aufgabe 2

Zwei Normen $\| \|_a$ und $\| \|_b$ auf dem Vektorraum V heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten C_a und C_b gibt mit $\|x\|_a \leq C_b \|x\|_b$ und $\|x\|_b \leq C_a \|x\|_a$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass die Normen $\| \|_1$, $\| \|_2$ und $\| \|_\infty$ aus Aufgabe 1 jeweils zueinander äquivalent sind.

Aufgabe 3

Für ein $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ sei folgende Abbildung gegeben:

$$\| \|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(a) Lesen Sie in der Literatur nach, weshalb auch $\| \|_p$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie für $n = 2$, dass $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 4

(a) Sei $(V, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum, $U \subset V$ mit $U \neq \emptyset$ und $d(x, y) := \|x - y\|$ für alle $x, y \in U$. Zeigen Sie, dass (U, d) ein metrischer Raum ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(a, b) := \int\limits_{\min\{a,b\}}^{\max\{a,b\}} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ beschreibt.

Aufgabe 5

Zwei Metriken d_1 und d_2 auf dem metrischen Raum X heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten C_1 und C_2 gibt mit $d_1(x,y) \leq C_2 d_2(x,y)$ und $d_2(x,y) \leq C_1 d_1(x,y)$ für alle $x, y \in X$.

(a) Sei (X, d_1) ein metrischer Raum, (x_n) eine konvergente Folge in X bezüglich d_1 und d_2 eine zu d_1 äquivalente Metrik. Zeigen Sie, dass (x_n) dann auch bezüglich d_2 konvergent ist.

(b) Wie sehen Folgen aus, die bezüglich der diskreten Metrik konvergieren?