Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 29.04.2011

Abgabe: 06.05.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 02

Aufgabe 1

(a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $f_n(x) = -2nxe^{-nx^2}$ für $0 \leq x \leq 1$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und geben Sie die zugehörige Grenzfunktion an.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und (f_n) eine Funktionenfolge stetiger Funktionen $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

(c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass **(b)** im Allgemeinen nicht gilt, wenn man die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge (f_n) durch punktweise Konvergenz gegen die Grenzfunktion f ersetzt.

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgenden Satz:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und (f_n) eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ für die für alle $x \in I$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert. Desweiteren sei die Ableitung f'_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig und die Folge (f'_n) in I gleichmäßig konvergent. Definiert man dann $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in I$, so ist auch f differenzierbar mit stetiger Ableitung und es gilt $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

(a) In metrischen Räumen sind beliebige Vereinigungen offener Mengen wieder offen.

(b) In metrischen Räumen sind endliche Schnitte offener Mengen wieder offen.

(c) Metrische Räume sind topologische Räume.

(d) Unendliche Schnitte offener Mengen müssen nicht offen sein.

Aufgabe 4

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie:

(a) M ist genau dann offen, wenn ihr Komplement M^C abgeschlossen ist.

(b) ∂M ist abgeschlossen.

(c) $\partial M = \partial(M^C)$

(d) $\overline{M} = \overset{o}{M} \cup \partial M$