Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 06.05.2011

Abgabe: 13.05.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 03

Aufgabe 1

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zu jedem Punkt $x \in X$ existiere ein $\varepsilon > 0$, so dass $f|_{B_\varepsilon(x)}$ konstant ist. Zeigen Sie, dass f in diesem Fall konstant ist, wenn X zusammenhängend ist.
(Tipp: Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in X \mid f(x) = f(\overline{x})$ für ein gegebenes $\overline{x} \in X\}$ offen und abgeschlossen ist)

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie folgende Äquivalenz: In einem metrischen Raum (X, d) ist eine Teilmenge $M \subset X$ genau dann abgeschlossen, wenn jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ihren Grenzwert in M hat.

(b) Zeigen Sie, dass zwei äquivalente Metriken $d_1 \sim d_2$ dieselbe Topologie $\tau_1 = \tau_2$ induzieren.

(c) Zeigen Sie für $d_1 \sim d_2$: Ist $M \subset X$ offen/abgeschlossen/beschränkt/kompakt in (X, d_1), so ist M auch offen/abgeschlossen/beschränkt/kompakt in (X, d_2).

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\Big\{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0, 1]\Big\} \cup \Big\{\{0\} \times [-1, 1]\Big\}$$

zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 4

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Für einen Punkt $x \in X$ definieren wir seinen Abstand zur Menge A durch $d_A(x) := \operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion d_A stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$\mathbb{1}_A^\varepsilon : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 1 - \frac{1}{\varepsilon}\min\{d_A(x), \varepsilon\}$$

stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_A^\varepsilon(x) \to \mathbb{1}_A(x)$ punktweise konvergiert genau dann, wenn A abgeschlossen ist.