Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 13.05.2011

Abgabe: 20.05.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 04

Aufgabe 1

(a) Sei V ein Vektorraum und $(W, \|\cdot\|_W)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass dann mit Hilfe einer linearen, invertierbaren Abbildung $L : V \longrightarrow W$ durch

$$\|x\|_V := \|Lx\|_W$$

eine Norm auf V definiert wird.

(b) Zeigen Sie: Alle Normen auf einem endlich dimensionalen Raum sind äquivalent.
(Hinweis: Wählen Sie zwei Normen $\|\cdot\|_\bigstar$ und $\|\cdot\|_\heartsuit$ auf einem beliebigen endlich dimensionalen Raum W mit $\dim(W) = n < \infty$. Setzen Sie $V = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, benutzen Sie Aufgabenteil **(a)** mit der Koordinatenabbildung L bezüglich einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ von W und schließen Sie mit dem Satz aus der Vorlesung über die Äquivalenz von Normen auf dem $\mathbb{R}^n$)

(c) Beweisen Sie den Rest von Lemma 5.12.

Aufgabe 2

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Räume, $\dim(V) = n < \infty$ und $A : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Abbildung A unter diesen Voraussetzungen Lipschitz-stetig ist.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1)

Aufgabe 3

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler, normierter Vektorraum mit Vektornorm $\|\cdot\|$. Dann wird auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(V, V)$ der linearen Abbildungen von V nach V durch

$$\|A\|_{Op} := \max\{\|Ax\| : x \in V \text{ mit } \|x\| = 1\}$$

eine Norm definiert, die sogenannte Operatornorm. Wieso existiert dieses Maximum? Die Operatornorm ist die kleinste Lipschitz-Konstante $C > 0$, für welche $\|A(x-y)\| \leq C\|x-y\|$ gilt. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{Op}$ eine Norm ist.

Aufgabe 4

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $\mathcal{O} \subset X$ offen und $K \subset \mathcal{O}$ kompakt. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d(x, y) > \delta$ gilt für alle $x \in K$ und $y \in \partial\mathcal{O}$.

Aufgabe 5

Es sei τ die Betragstopologie auf $\mathbb{R}$, d.h. die durch $|\cdot|$ induzierte Topologie. Bestimmen Sie die zugehörige Spurtopologie $\tau_{\mathbb{N}}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Spurtopologie und der diskreten Metrik auf $\mathbb{N}$?