Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 20.05.2011

Abgabe: 27.05.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 05

Aufgabe 1: Inverse Funktion einer stetigen Funktion I

Beweisen Sie Satz 7.7 aus der Vorlesung (das Skript gibt es auf der Homepage als pdf zum Download).

Aufgabe 2: Inverse Funktion einer stetigen Funktion II

Gegeben sei die Menge
$A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u,v \geq 0 \; ; \; u^3 \leq v \leq 2u^3 \text{ für } 0 \leq u \leq 1 \; , \; 1 \leq v \leq 2 \text{ für } u \geq 1\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge A.

(b) Gegeben sei $H : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(u,v) \longmapsto (x,y)$ mit $x = \frac{v}{u}$ und $y = \frac{v}{u^2}$ für $(u,v) \in A$ mit $u,v > 0$ und $H(0,0) := (0,0)$. Zeigen Sie, dass die Funktion H im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

(c) Bestimmen Sie die Inverse G zu H und zeigen Sie, dass G im Punkt $(0,0)$ **nicht** stetig ist.

Aufgabe 3: Differentiationsregeln

Zeigen Sie, dass die neue Produktregel und die neue Ableitungsregel für die Umkehrfunktion die alten Regeln im Spezialfall enthalten.

Aufgabe 4: Differenzieren

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen folgender Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^{4\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \longmapsto \frac{x_1^2 x_2 + x_3}{\exp(x_3)} + x_2 \sin(4x_3)\exp(x_4 - x_1)$

(b) $f : \mathbb{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin(3x_1 + x_2)\exp(x_2) + x_2 \\ x_1^3 - x_2\cos(5x_1)\sin(x_2) \\ \sin^2(x_2) - x_1 x_2 \end{pmatrix}$

(c) Führen Sie die Funktionen aus **(a)** und **(b)** jeweils auf eine Verkettung elementarer Funktionen zurück. Wie oft wird beim Nachweis der Differenzierbarkeit dieser Verkettungen auf Satz 7.2 bzw. Satz 7.5 zurückgegriffen?

Aufgabe 5: Richtungs- und partielle Ableitungen

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass im Punkt $(0,0)$ alle Richtungsableitungen existieren, f an der Stelle $(0,0)$ jedoch nicht differenzierbar ist.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass im Punkt $(0,0)$ die partiellen Ableitungen $\partial_1 g$ und $\partial_2 g$ existieren, g an der Stelle $(0,0)$ jedoch nicht differenzierbar ist.

(c) Gegeben sei die Funktion

$$h(x,y) := \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\partial_2 \partial_1 h(0,0) \neq \partial_1 \partial_2 h(0,0)$$