



Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 27.05.2011

Abgabe: 03.06.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 06

Aufgabe 1: Verträglichkeit von Normen

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(V, W)$ der linearen Abbildungen von V nach W und $\|\cdot\|_V$ bzw. $\|\cdot\|_W$ die zugehörigen Vektornormen auf V und W . Dann heißt $\|\cdot\|$ zu den Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ **verträglich**, falls für alle $A \in \mathcal{L}(V, W)$ und für alle $x \in V$ gilt:

$$\|Ax\|_W \leq \|A\| \cdot \|x\|_V$$

Zeigen Sie, dass die von den Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ induzierte Operatornorm verträglich zu diesen Vektornormen ist.

Aufgabe 2: Matrixnorm und Lipschitz-Konstante

- (a) Wir betrachten die normierten Räume $(\mathbb{R}^{n \times 1}, \|\cdot\|_\infty)$ und $(\mathbb{R}^{m \times 1}, \|\cdot\|_\infty)$ und eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^{n \times 1}$. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times 1}$ heißt Lipschitz-stetig in U mit Lipschitz-Konstante $L > 0$ falls

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L \|x - y\|_\infty \quad \text{für alle } x, y \in U.$$

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^{n \times 1}$ konvex und die Ableitung von f beschränkt. Zeigen Sie, dass f dann Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $L = \sup_{z \in U} \|f'(z)\|$, wobei $\|\cdot\|$ eine verträgliche Matrixnorm ist.

- (b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\|A\| := \max_{x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ die Erweiterung der Matrixnorm von Blatt 04 Aufgabe 3 für im Allgemeinen nichtquadratische Matrizen bzgl. der $\mathbb{R}^{p \times 1}$ -Vektornorm $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_p|\}$. Geben Sie eine Formel an, mit der man $\|A\|$ schnell berechnen kann.

(Hinweis: Schreiben Sie für ein $y \in \mathbb{R}^{n \times 1} \setminus \{0\}$ den Ausdruck $\|Ay\|_\infty$ mit Hilfe der Definition von $\|\cdot\|_\infty$ auf und überlegen Sie, für welches $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ die Norm $\|Ay\|_\infty$ maximal wird unter der Berücksichtigung von $\|y\|_\infty = 1$. Was bedeutet $\|y\|_\infty = 1$ für eine einzelne Komponente y_i ?)

- (c) Es sei nun $U := \{x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid |x_i| < 1 \text{ für } i = 1, 2, 3\}$ und $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{7 \exp(3)} \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie unter Verwendung von (a) und (b), dass f Lipschitz-stetig ist und geben Sie eine zugehörige Lipschitz-Konstante L an.

- (d) Ist die Gleichung $f(x) = x$ mit der Funktion f aus Teilaufgabe (c) für ein $x \in \overline{U}$ (eindeutig) lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch!
- (e) Formulieren und **beweisen** Sie die Aussage aus (a) für den allgemeineren Fall zweier endlichdimensionaler normierter Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Aufgabe 3: mehrdimensionale Kettenregel

Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ und für ein festes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein $c \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ eine Funktion $g : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(Ax + c)$. Berechnen Sie $g'(x)$ und $g''(x)$.

Aufgabe 4: Tangentialebene

Wir befinden uns im Konstanzer Hafen und schauen entlang der Horizontebene (Tangentialebene an die Erde im Punkt Konstanzer Hafen) in Richtung Bregenzer Hafen (GPS-Koordinaten Hafen Konstanz: $47^\circ 39.6'$ N, $9^\circ 10.9'$ E ; GPS-Koordinaten Hafen Bregenz: $47^\circ 30.5'$ N, $9^\circ 44.9'$ E ; Erdradius = 6371km).

- (a) Geben Sie die Ebenengleichung dieser Horizontebene an.
- (b) Geben Sie die Koordinaten des Punktes in der Horizontebene an, unter dem der Bregenzer Hafen liegt. Wie weit liegt der Bregenzer Hafen unterhalb dieser Horizontebene?
- (c) Wie hoch muss man einen Turm im Bregenzer Hafen bauen, damit man ihn vom Konstanzer Hafen aus sehen kann? An welchem Punkt berührt die Turmspitze die Horizontebene?
- (d) Wie weit sind die in (b) und (c) zu berechnenden Punkte voneinander entfernt?