



Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 03.06.2011

Abgabe: 10.06.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 07

Aufgabe 1: Taylor-Entwicklung

- (a) Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^{2 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y)^T \mapsto x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ nach Potenzen von $(x - 1)$ und $(y - 2)$.
- (b) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^{2 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y)^T \mapsto (x + y^2) \exp(-(x^2 + y^2))$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f , die Hesse-Matrizen von f in den kritischen Punkten, sowie die Taylorentwicklungen bis zur zweiten Ordnung in den kritischen Punkten. Zeichnen Sie mit einem Plotprogramm Ihrer Wahl die Höhenlinien dieser Taylor-Approximationen. Was für Kurven im $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ ergeben sich anhand der Höhenlinien in der Umgebung der kritischen Punkte? Begründen Sie Ihre Antwort! Ziehen Sie anhand der Höhenlinien den Schluss, um welche Art von kritischen Punkten es sich hierbei handelt.

Aufgabe 2: Leibniz-Formel

Es seien $f, g : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils beliebig oft differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann für die Ableitung des Produktes die sogenannte Leibniz-Formel gilt:

$$\nabla^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \nabla^\beta f \nabla^{\alpha - \beta} g$$

Für zwei Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ bedeutet $\beta \leq \alpha$ komponentenweise $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1, \dots, n$. Desweiteren ist

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!}.$$

Aufgabe 3: Optimierung

Gegeben seien Wertepaare (x_i, y_i) für $i = 1, \dots, n$. Leiten Sie eine Formel für die Koeffizienten α, β der Ausgleichsgeraden $\alpha + \beta x$ her.

Hinweis: Die Ausgleichsgerade ist dabei jene, für die der durchschnittliche Abstand von den Daten möglichst klein ist. Minimieren Sie dazu die Funktion

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i - y_i)^2.$$

Aufgabe 4: konvexe Funktionen

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Ist f konvex, dann liegt der Graph von f oberhalb der Tangenten an den Graphen.
- (b) f ist genau dann konvex, wenn $f'' \geq 0$ gilt.