Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 10.06.2011

Abgabe: 17.06.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 08

Aufgabe 1: Minimum

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^{1\times 2} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto 2x^4 - 3x^2y + y^2$. Zeigen Sie, dass $(0, 0)$ ein kritischer Punkt mit $f(0, 0) = 0$ und $H_f(0, 0)$ positiv semidefinit ist. Untersuchen Sie die Funktion längs aller geraden Schnitte in $(0, 0)$ auf ein (lokales) Minimum. Handelt es sich beim Punkt $(0, 0)$ um ein (lokales) Minimum von f? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch!

Aufgabe 2: Optimierung & Lagrange-Multiplikatoren I

Bestimmen Sie das Volumen des größten Quaders mit achsenparallelen Kanten innerhalb des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

(Hinweis: Formulieren Sie zuerst die zu maximierende Volumenfunktion und die zu beachtende Nebenbedingung, bevor Sie die Lagrange-Funktion aufstellen und das Problem mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorregel lösen)

Aufgabe 3: Optimierung & Lagrange-Multiplikatoren II

Zeigen Sie, dass das geometrische Mittel nie größer als das arithmetische Mittel ist, das heißt, dass für beliebige positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \;\leq\; \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

(Hinweis: maximieren Sie die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2$ unter der Nebenbedingung $x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0$)

Aufgabe 4: Newton-Verfahren

Wir betrachten eine leicht abgeänderte Version der Newton-Iteration, mit der ebenfalls eine Nullstelle einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ berechnet werden soll und die durch folgende rekursive Vorschrift gegeben ist:

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_0)^{-1} f(x_k)\ ,\ x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^{n\times 1}, \mathbb{R}^{n\times 1})$ und $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit $f(\overline{x}) = 0$ und $f'(\overline{x})$ invertierbar. Zeigen Sie, dass es dann ein $\delta > 0$ gibt, so dass auch diese Iteration für jeden Startwert $x_0 \in B_\delta(\overline{x})$ gegen $\overline{x}$ konvergiert.