Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 17.06.2011

Abgabe: 24.06.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 09

Aufgabe 1: schlampige Notation

Für ein ideales Gas mit Druck p, Volumen V und absoluter Temperatur T gilt mit einer Konstanten c die Zustandsgleichung $pV = cT$. Löst man in dieser impliziten Beziehung nach einer Variablen (z.B. p) als Funktion der beiden anderen (T, V) explizit auf, so ist p ein natürlicher Name für diese Funktion. Berechnen Sie nun für ein ideales Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V}$$

Warum kann diese in Lehrbüchern häufig verwendete Notation leicht für Verwirrung sorgen? Wie sollte diese Beziehung korrekt notiert werden?

Aufgabe 2: implizit gegebene Lösung der Burgers-Gleichung

Hier sehen Sie, wie man mit dem Satz über implizite Funktionen die Existenz von Lösungen zu einem partiellen Differentialgleichungsproblem nachweisen kann.

Sei $\Phi(t, x, u) = \exp(x - tu) - u$ für $t, x, u \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die implizite Gleichung $\Phi(t, x, u) = 0$ in der Umgebung von Punkten $(0, x, \exp(x))$ nach u aufgelöst werden kann.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Auflösung $U(t, x)$ aus der impliziten Gleichung $\Phi(t, x, U(t, x)) = 0$ und zeigen Sie durch Einsetzen, dass U folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(U(t,x))^2 = 0 \quad , \quad U(0,x) = \exp(x)$$

Aufgabe 3: Zum Satz über inverse Funktionen

(a) Sei $X \subset \mathbb{R}^{n\times 1}$ offen, $g \in C^1(X, \mathbb{R}^{n\times 1})$ und $g'(x)$ invertierbar für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass g dann eine offene Abbildung ist.

(b) Geben Sie eine stetige Abbildung an, die nicht offen ist.

Aufgabe 4: Tangentialraum und Kurven

(a) Gegeben sei der sogenannte "Affensattel" (der Name beschreibt den Graphen der unten aufgeführten Funktion φ, denn auf dem "Sattel" könnte ein Affe seine Beine und seinen Schwanz ablegen)

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x, y)^T \longmapsto x^3 - 3xy^2$$

Wir betrachten nun die Fläche im $\mathbb{R}^{3\times 1}$, die durch

$$\left\{ \big(x, y, \varphi(x,y)\big)^T \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben ist. Berechnen Sie im Punkt $\big(1, 1, \varphi(1,1)\big)^T$ den Tangential- und Normalraum an die obige Fläche.
(Bemerkung: im $\mathbb{R}^{3\times 1}$ kann man den Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt der Tangentenvektoren konstruieren. Allgemeiner hilft aber der Trick, den Graphen als Nullfläche von $\phi(x, y, z) = z - \varphi(x, y)$ zu schreiben und dann $\nabla\phi$ zur Berechnung des Normalraumes zu benutzen. Bitte wählen Sie diesen allgemeineren Weg zur Übung!)

(b) Berechnen sie die Länge der logarithmischen Spirale $x(r, \varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ mit $\varphi = \ln r$ für $r \in (0, 1]$.

(c) Gegeben sei eine glatte Kurve $\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 1}$ in Bogenlängenparametrisierung. Parametrisieren Sie einen Kreis Γ mit Radius r und Mittelpunkt M ebenfalls bezüglich der Bogenlänge. Nun soll der Kreis Γ die Kurve an der Stelle $\gamma(s_1)$ möglichst gut berühren, d.h. es soll gelten $\Gamma(s_2) = \gamma(s_1)$, $\Gamma'(s_2) = \gamma'(s_1)$ und $\Gamma''(s_2) = \gamma''(s_1)$. Bestimmen Sie den Radius und den Mittelpunkt dieses Kreises (dem sogenannten *Schmiegekreis*) in Abhängigkeit von γ.