Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 24.06.2011

Abgabe: 01.07.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 10

Aufgabe 1: Krümmung einer Kurve

In den seltensten Fällen gelingt es eine Kurve in Bogenlängenparametrisierung anzugeben. Leiten Sie einen Ausdruck für die Krümmung einer ebenen Kurve her, die nicht über die Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 2: Schutzblech vs. Rollsplitt

Ein Auto fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit v auf einer ebenen geraden Landstraße, auf welcher sich Rollsplitt befindet. Beim Überrollen dieser kleinen Kieselsteine bleibt ein solcher im Profil des Reifens stecken.

(a) Parametrisieren Sie die Kurve, die der Kieselstein im Profil des Reifens bei Fortbewegung des Autos beschreibt. Skizzieren Sie den Graphen dieser Kurve jeweils für den Fall, dass der Stein im Profil bzw. in der Felge des Reifens festhängt. Wann ist der Stein am schnellsten und wann am langsamsten?

(b) Unterscheidet sich die vom Kieselstein zurückgelegte Strecke von der des Autos? Schätzen Sie die Länge einer Periode dieser Kurve (Kieselstein im Profil des Reifens) relativ zur zurückgelegten Distanz des Fahrzeugs bis auf 1% Fehlergenauigkeit ab.

(c) Löst sich der Stein während der Fahrt wieder vom Reifen, so verläuft dessen Flugbahn, solange bis der Stein den Boden berührt, entsprechend der Bewegungsgleichung $\ddot{\Gamma}(t) = g$ für $t \geq t_0$. Dabei bezeichnet g den konstanten Fallbeschleunigungsvektor auf der Erde. Berechnen Sie die Gipfelhöhe der Flugbahn des Steins und die minimale Aufschlaggeschwindigkeit des Steins auf der Windschutzscheibe eines nachkommenden Fahrzeugs in Abhängigkeit von v. Welche Konsequenz hat das für die Konstruktion von Schutzblechen, Radkästen und Schmutzfängern?

Aufgabe 3: Integrabilitätsbedingung

Zeigen Sie, dass das auf $G = \mathbb{R}^{2\times 1} \setminus \{0\}$ definierte Vektorfeld

$$F(x) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

die Integrabilitätsbedingung (nIB2) erfüllt, jedoch kein konservatives Kraftfeld beschreibt. Ändert man das Definitionsgebiet ab zu $\tilde{G} = \mathbb{R}^{2\times 1} \setminus \{(x_1, 0)^T \mid x_1 \leq 0\}$, so beschreibt F nun ein konservatives Kraftfeld. Geben Sie eine Stammfunktion an.

Aufgabe 4: 1-Formen

Sei $X \subset \mathbb{R}^{n\times 1}$ offen, $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ und $df(x) := f'(x)$. Zeigen Sie, dass df eine 1-Form ist und dass gilt:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \, dx_i$$

Im Spezialfall $n = 1$ gilt also $df = \frac{df}{dx} dx$.