Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 01.07.2011

Abgabe: 08.07.2011
bis spätestens 9 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis II

Blatt 11

Aufgabe 1: Gram'sche Determinante

(a) Es sei $\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $m \leq n$. Mit Hilfe der Gram'schen Determinante definieren wir die Funktion $G_\psi(x) := \sqrt{\det(\psi'(x)^T \psi'(x))}$. Beweisen Sie die speziellere Darstellung von G_ψ aus der Vorlesung im Fall $m = 1$ bzw. $n = 3$ und $m = 2$ bzw. $m = n$.

(b) Wir betrachten die folgenden Koordinatentransformationen:
Zylinderkoordinaten:

$$(r, \varphi, h) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ h \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad r \in [0, R],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ h \in [H_-, H_+]$$

Kugelkoordinaten:

$$(r, \varphi, \vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad r \in [0, R],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in [0, \pi]$$

Berechnen Sie jeweils $G_\psi(x)$ für diese Transformationen. Welche Flächen ergeben sich jeweils bei Festhalten einer der 3 Variablen? Berechnen Sie $G_\psi(x)$ auch jeweils für diese Fälle.

Aufgabe 2: verschiedene Parametrisierungen

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^{m\times 1}$ gegeben und die Menge $Y \subset \mathbb{R}^{n\times 1}$ habe zwei verschiedene Parametrisierungen $\psi : A \longrightarrow Y$ und $\varphi : B \longrightarrow Y$. Weiter sei $H = \varphi^{-1} \circ \psi : A \longrightarrow B$ ein Diffeomorphismus und $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_A f(\psi(x)) G_\psi(x) \lambda^m(dx) = \int_B f(\varphi(x)) G_\varphi(x) \lambda^m(dx)$$

Der Wert des Oberflächenintegrals ist damit unabhängig von der Parametrisierung.

Aufgabe 3: Rotationsflächen und -volumen

Gegeben sei eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Nun soll die Oberfläche bzw. das Volumen berechnet werden, das durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht. Leiten Sie eine Formel her, mit der Sie

(a) die Oberfläche **(b)** das Volumen

des Rotationskörpers in Abhängigkeit von der Funktion f berechnen können. Berechnen Sie damit die Oberfläche und das Volumen im Fall $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in [1, \infty)$.

Aufgabe 4: Fluß durch Oberfläche eines Zylinders

Gegeben sei der Zylinder $B = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\ ,\ -1 \leq x_3 \leq 1 \right\}$. An jeder glatten Stelle der Zylinderoberfläche kann man den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor n auf der Oberfläche des Zylinders angeben. Die Divergenz eines Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ gibt an, ob und wo ein Vektorfeld Quellen bzw. Senken besitzt, und ist definiert durch $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F_i$. Sei nun das Vektorfeld

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1^2 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie durch Übergang zu Zylinderkoordinaten, dass das Oberflächenintegral $\int_{\partial B} (F \cdot n) \lambda_{\partial B}(dx)$ über die Oberfläche des Zylinders denselben Wert liefert, wie das Volumenintegral $\int_B (\operatorname{div} F) \lambda^3(dx)$.

Aufgabe 5: Integration

Gegeben sei eine Menge $B \subset \mathbb{R}^{2\times 1}$, die durch $y = x$, $xy = 1$ und $y = 2$ berandet ist.

(a) Skizzieren sie die Menge B.

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von B.

(c) Bestimmen Sie das Volumen des auf B stehenden Zylinderabschnitts mit Deckfläche $z = \frac{y^2}{x^2}$