

1) Zustandsmengen

Mathematik hilft bei Verständnis / Vorhersage / Kontrolle von Systemen

Sonnensystem (Phy), Ökosysteme (Bio), Wirtschaftssysteme (WiWi), Wattersystem (Met)
Atomsysteme (Che), technische Systeme (Ing), etc, etc.

Welt

Abstraktion

(Zielsetzung bestimmt
Berechnungsgenauigkeit)

System

Mathematik

Modell

typischerweise beschreiben
durch Zahlenlisten

Regeln / Gegebenheiten, Rahmenbedingungen
bestimmen den Systemzustand

Zustandsmenge X : denkbare Systemzustände

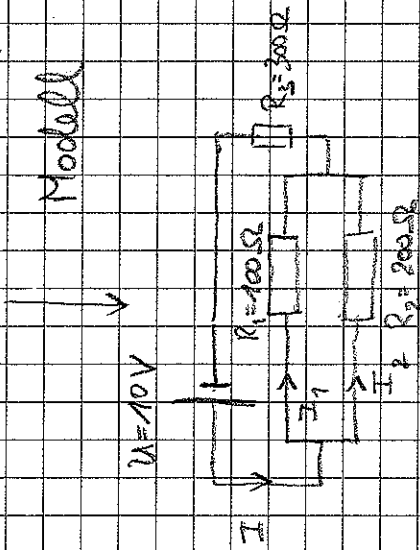
Vorgegebener Zustand: Lösung $x \in X$

der Zustands (im) Gleichungen

↑
Übersetzung
der Regeln,
Gegenwärtigkeiten

Beispiel:

Widerstandsschaltung



Modell: siehe Physik (sehr viel Abstraktion!)

Zustandsmenge $X = \mathbb{R}^{3 \times 1}$ $x = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I \end{pmatrix}$ (Ballungliste)

Zustandsgleichungen:

$$I = I_1 + I_2$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2$$

$$R_3 I + R_1 I_1 = U$$

in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ R_3 & 0 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{pmatrix} \leadsto Ax = b$$

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ $x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ $b \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ LGS

$X = \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ist Spezialfall eines Vektorraums (VR)

$Ax = b$ ist Spezialfall einer Gleichung $\phi(x) = 0$ mit der Funktion $\phi: \mathbb{R}^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$

in vielen Fällen hat man: V, W VR, $\phi: V \rightarrow W$, $\phi(x) = 0$

zustandsmenge
zustandsregeln
zustandsgleichung

Vergleichen von Systemgesteuertwerden $\hat{=}$ Verstehen von Funktionen $\phi: X \rightarrow Y$
zwischen Teilmengen von VR

isomorph
$$V \cong \mathbb{R}^{m \times 1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$W \cong \mathbb{R}^{n \times 1} \cong \mathbb{R}^n$$

sind V, W endlichdimensional, dann ... wir müssen $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ verstehen (Analysis II)

oft auch V, W ∞ -dimensional

Abstraktion

Beispiel: Wie plüzt ein Stück Kreide?
System

$V = \{x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid x_i: 2 \times \text{diffbar auf } (0, \infty), x_i(0) \text{ stetig auf } [0, \infty)\}$

Zustandsgleichung:

$x_1''(t) = 0$	$x_1(0) = \bar{x}_1$	$x_1'(0) = \bar{v}_1$
$x_2''(t) = 0$	$x_2(0) = \bar{x}_2$	$x_2'(0) = \bar{v}_2$
$x_3''(t) = -g$	$x_3(0) = \bar{x}_3$	$x_3'(0) = \bar{v}_3$

Wie in Analysis 1: untersuche Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $f: X \rightarrow Y$

$f(x)$ (nahe) bei $f(\bar{x})$
wenn x (nahe) bei $\bar{x}$

$f(x)$ (nahe) bei $f(\bar{x}) + L(x - \bar{x})$
wenn x (nahe) bei $\bar{x}$
↙ lineare Abb

brauche: Frägsierung von Nähe