

2) Abstandsmessung

in Vektorräumen: allgem. Konzept der Länge eines Vektors, Abstand zwischen x und y mit $K \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist dann Länge von $x-y$

Definition 2.1: Sei V ein K -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm falls die folgenden Bedingungen für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ erfüllt sind

$$N1: \|x\| \geq 0$$

$$N2: \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$N3: \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$N4: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Vektorraum.

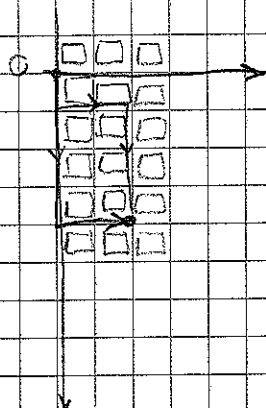
Beispiele: $V = \mathbb{R}, \|x\| = |x|$ (Analysis I: Betrag misst Abstand von 0)

$$V = \mathbb{R}^2, \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



$\|\cdot\|_2$ nicht der einzige sinnvolle Abstand!

ℓ_1 - Norm
New York Taxicab



$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

Maximum-Norm:

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_1|, |x_2|\}$$

gilt auch in $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n |x_i|$$

p -Norm

∞ -dimensionaler Fall:

$$V = C^0([a, b], \mathbb{R})$$

Stetige Funktionen

Definition Menge

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

L^p -Norm

Jeweils benötigt: Nachweis von $N1-N4$

in allgemeineren Mengen:

Definition 2.2 Sei $\phi \neq X$ eine Menge und $d: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ eine Abbildung,
die für alle $x, y, z \in X$ die Bedingungen

$$M2 \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$M3: \quad d(x, y) = d(y, x)$$

(Symmetrie)

$$M4: \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

(Dreiecksungleichung)

erfüllt. Dann heißt (X, d) ein metrischer Raum, und d heißt Metrik bzw.

Abstand auf X .

Beispiele: $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $\phi \neq U \subseteq V$, $d(x, y) := \|x - y\|$ (U, d) metrischer Raum

es gibt sehr seltsame Abstandsbegriffe:

diskrete Metrik, $X \neq \emptyset$ $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ erfüllt alle Bedingungen "diskrete Metrik"

Lemma 2.3 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

Beweis:
$$\underbrace{0}_{M2} = \underbrace{d(x, x)}_{M4} \leq \underbrace{d(x, y)}_{M4} + \underbrace{d(y, x)}_{M4} = 2 \underbrace{d(x, y)}_{M4} \leadsto \underbrace{d(x, y)}_{M4} \geq 0 \quad \square$$

Wichtig: Abstandsbegriff impliziert Konvergenzbegriff

Definition 2.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X .

Die Folge heißt konvergent mit Grenzwert $A \in X$ wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, A) = 0$

Die Folge heißt Cauchy-Folge wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N, d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

(X, d) heißt vollständig metrischer Raum wenn jede Cauchy-Folge konvergent ist. Vollständige normierte Räume heißen Banachräume.

Einige Ergebnisse aus Analysis II gelten (mit identischem Beweis) in metrischen Räumen

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CF $\rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Beschränktheit
d.h. $\exists M : \forall n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_1) \leq M$

Satz 2.5:

Seien (X_1, d_1) , (X_2, d_2) metrische Räume

Dann ist auf dem Produktraum $X = X_1 \times X_2$ mit Elementen $x = (x_1, x_2)$

durch $d(x, y) := \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$ eine Metrik gegeben

Eine Folge (x^n) konvergiert in (X, d) genau dann, wenn (x_i^n) in (X_i, d_i) konvergiert und $\lim x^n = (\lim x_1^n, \lim x_2^n)$.

Außerdem ist (X, d) genau dann vollständig, wenn (X_i, d_i) vollständig sind.

Beweis:

$$M2: d(x, y) = 0 \Leftrightarrow d_1^*(x_1, y_1) = 0 \stackrel{M2}{\Leftrightarrow} x_1 = y_1 \Leftrightarrow x = y$$

$$M3: d(y, x) = \max_{i=1,2} d_i(y_i, x_i) \stackrel{M3}{=} \max d_i(x_i, y_i) = d(x, y)$$

$$M4: d_i(x_1, y_1) \leq d(x_1, z_1) + d(z_1, y_1) \leq \max_i d(x_i, z_i) + \max_i d(z_i, y_i) \quad \text{für } i=1,2$$

So (x^n) konv. Folge in (X, d) , $\lim x^n = A$ dann $d(x_i^n, A_i) \leq d(x^n, A) \rightarrow 0$ also $x_i^n \rightarrow A_i$

Seien $(x_i^n) \rightarrow A_i$ in (X_i, d_i) , $\lim x_i^n = A_i$ Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N_i \in \mathbb{N}$ mit $d(x_i^n, A_i) < \varepsilon$ für $n \geq N_i$

Setze $N = \max \{N_1, N_2\}$ dann $d(x^n, A) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ d.h. $x^n \rightarrow A$.

Seien (X_i, d_i) vollständig, $(X^1) \subset$ in (X, d) , $\varepsilon > 0$

Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x^n, x^m) < \varepsilon$ für $n, m \geq N$

also $d(x_i^n, x_i^m) < \varepsilon$ falls $n, m \geq N$ also $(x_i^n) \subset$ in (X_i, d_i) also konv

also (x^n) konv also (X, d) vollständig.

Sei (X, d) vollständig $(x_i^n) \subset$ in (X_i, d_i) dann $((x_i^n, x_i^2)) \subset$ in (X, d) für jedes $x_i \in X_i$, also konvergent also x_i^n konvergiert also (X_i, d_i) vollständig, genauso für (X_2, d_2) $\square$

! Per Induktion zeigt man gleiche Aussagen für $X = X_1 \times \dots \times X_n$

$$d(x, y) = \max_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)$$

Dann ist: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$d_\infty(x, y) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i| = \|x - y\|_\infty$ } vollständiger metrischer Raum (d.h. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ Banachraum)
 Folge konvergiert genau dann wenn alle Komponenten konvergieren

Achtung: nicht alle metrischen Räume sind vollständig.

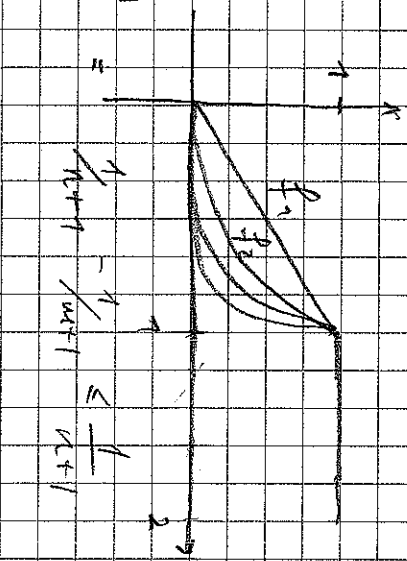
Beispiel: $X = C^0([0,2], \mathbb{R})$ stetige Fkt auf $[0,2]$

$$\|f\| := \int_0^2 |f(x)| dx \quad d(f,g) := \|f-g\|$$

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Ist C^0 in X , beachte $f_{n+1} \neq f_n$

$$\|f_n - f_m\| = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = \int_0^1 \left| \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{m+1} x^{m+1} \right| dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{n+1}$$



Angenommen $f_n \rightarrow f$ in X (d.h. insbesondere $f \in X$!)

Dann gilt man allgemein $f_n|_{[0,1]} \rightarrow f|_{[0,1]}$ in $C^0([0,1], \mathbb{R})$ mit $\|u\| := \int_0^1 |u(x)| dx$

$$f_n|_{[0,1]} \rightarrow f|_{[0,1]} \text{ in } C^0([0,1], \mathbb{R}) \implies \|u\| := \int_0^1 |u(x)| dx$$

und für die spezielle Folge $f_n|_{[0,1]} \rightarrow 0$, $f_n|_{[1,2]} \rightarrow 1$ in dem angegebenen Rahmen

$$\text{denn } 0 = f(1) = 1 \quad \text{!}$$

beachte: für jeden Punkt $x \in [0, 2]$ gilt $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

man nennt dies "punktweise Konvergenz" der Funktionenfolge.

Definition 2.6 Seien $f_n : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$ Funktionen mit Werten in einem metrischen

Raum (Y, d) . Die Folge (f_n) heißt punktweise Konvergenz gegen

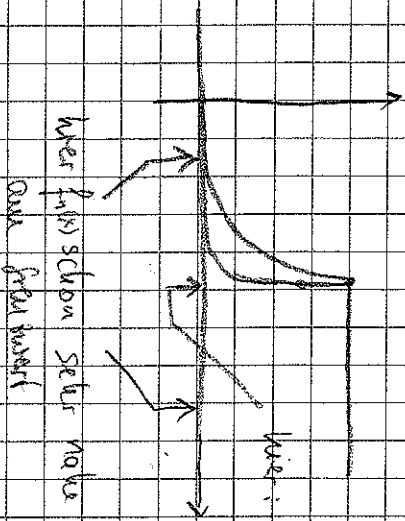
für alle $x \in X$ die Folge $(f_n(x))$ in (Y, d) konvergiert. Die durch

$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ definierte Funktion $f : X \rightarrow Y$ wird punktweise

Grenzwert von (f_n) genannt.

also: Ein punktweiser Grenzwert ist nicht stetig sein.

ganz



hier: $f_n(x)$ noch sehr weit weg vom Grenzwert

durch "ungleichmäßigkeit" der Konvergenz

werden Funktionswerte zu Grenzwert "uneinverständlich"

"überlappender" Abstand vom Grenzwert bleibt pos. $\sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - f(x)| = 1$ für alle n !

Wenn "überlappender" Abstand gegen Null geht für $n \rightarrow \infty$ spricht man von gleichmäßig Konvergenz

Lemma 2.7 Sei $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis: Sei $\bar{x} \in [a, b]$ und $(x_k) \subset [a, b]$ mit $x_k \rightarrow \bar{x}$

zu zeigen: $f(x_k) \rightarrow f(\bar{x})$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq N$

Da f_n stetig gibt es $K \in \mathbb{N}$ mit

$|f_n(x_k) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k \geq K$. Dann aber auch

$$|f(x_k) - f(\bar{x})| \leq |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(\bar{x})|$$

$$\leq 2 \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(\bar{x})| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq K.$$

Satz 2.8: $(C^0([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ mit $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ ist ein Banachraum

Beweis: $\|\cdot\|_\infty$ erfüllt Normeigenschaften (Hausdorffsche) ✓

Sei $(f_n) \subset C$ in $X = C^0([a,b], \mathbb{R})$ und $x \in [a,b]$

wegen $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{y \in [a,b]} |f_n(y) - f_m(y)|$ ist $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ also konvergent

Da (f_n) ist punktweise konvergent mit Grenzwert f . Zeige f_n konvergiert gleichmäßig gegen f .

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in [a,b]$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(y) - f_m(y)| < \varepsilon/2$ für $n, m \geq N$

Für $x \in [a,b]$ gilt es $M \in \mathbb{N}$ mit $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ für $m \geq M$

Wähle $n \geq N$ und $m \geq \max\{N, M\}$

Dann $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ wenn $n \geq N$

bedeutet: N unabhängig von x !

also $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ wenn $n \geq N$

Mit Lemma 2.4 folgt: f ist stetig also $f \in X$ und $\|f_n - f\| \rightarrow 0$

also (f_n) konvergiert in X ✓