

Kapitel 3 Stetigkeit und topologische Konzepte

Definition 3.1: Seien (X, d) , (Y, e) metrische Räume. Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$

heißt stetig in $\bar{x} \in X$ wenn für alle Folgen $(x_n) \subset X$ mit $x_n \rightarrow \bar{x}$

gilt: $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$. Ist f in allen $\bar{x} \in X$ stetig, so wird

f stetig genannt. $C^0(X, Y)$ bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen

von (X, d) nach (Y, e) bzw. kurz $C^0(X, Y)$ wenn die Räume verständlich sind

Versuche wichtige Sätze über stetige Funktionen $f: \overset{n}{\mathbb{I}} \rightarrow \mathbb{R}$ zu verallgemeinern ...

- ϵ - δ Charakterisierung
- Zwischenwertsatz
- Satz vom Minimum und Maximum
- Satz zur glm. Stetigkeit

Die ε - δ Charakterisierung paralleler Kurven mit Kugeln bzw. Umgebungen ...

Definition 3.2: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt Umgebung von x und x innerer Punkt von U , wenn $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\} \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$.

$B_\varepsilon(x)$ heißt ε -Umgebung von x oder ε -Kugel bzw. ε -Ball um x .

Beispiele: $X = \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \|x - y\|_2$



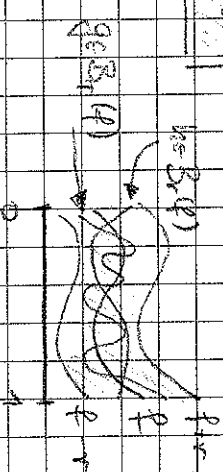
... kann rund sein

$$d(x, y) = \|x - y\|_\infty$$



... kann eckig sein

$$X = C^0([0, 1], \mathbb{R}) \quad d(x, y) = \|f - g\|_\infty$$



... kann weder rund noch eckig sein

$$X \neq \emptyset \quad d \text{ diskrete Metrik} \quad \dots \quad B_\varepsilon(x) = \begin{cases} \{x\} & \varepsilon \leq 1 \\ X & \varepsilon > 1 \end{cases}$$

Satz 3.3: Seien (X, d) , (Y, e) metrische Räume. Dann ist $f: X \rightarrow Y$ stetig in $x \in X$ genau dann, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist, bzw. äquivalent dazu

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: B_\varepsilon(f(x)) \supset f(B_\delta(x))$$

Beweis: Satz 10.11 (A1) mit " $|x - y|$ vor $d(x, y)$ " liefert

$$f \text{ stetig in } \bar{x} \iff \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in X: d(x, \bar{x}) < \delta \implies e(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon \iff (*)$$

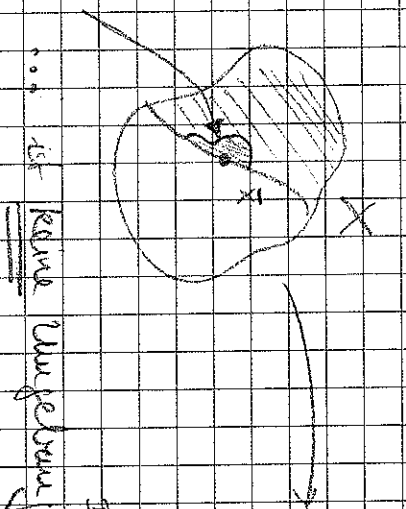
$$\text{weiter gilt } (*) \iff \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: f^{-1}(B_\varepsilon(f(\bar{x}))) \supset f^{-1}(f(B_\delta(\bar{x}))) \supset B_\delta(\bar{x})$$

" $\implies$ " Ist U Umgebung von $f(\bar{x})$, dann gilt es $B_\varepsilon(f(\bar{x})) \subset U$ also $f^{-1}(U) \supset f^{-1}(B_\varepsilon(f(\bar{x}))) \supset B_\delta(\bar{x})$ d.h. $f^{-1}(U)$ Umgebung von $\bar{x}$. (*)

" $\Leftarrow$ " Sei $\varepsilon > 0$. Da $U = B_\varepsilon(f(\bar{x}))$ Umgebung von $f(\bar{x})$, ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von $\bar{x}$ d.h. es gibt $\delta > 0$ so dass $B_\delta(\bar{x}) \subset f^{-1}(U) = f^{-1}(B_\varepsilon(f(\bar{x}))) \implies (*)$

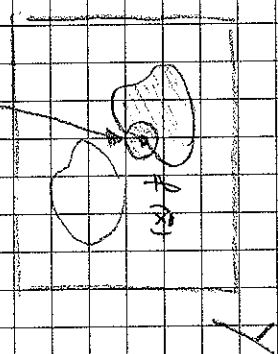


bedeutet beim Zerfallsen ist Umgebungsbedingung verletzt ... (typische Unstetigkeit)



... ist keine Umgebung von $\bar{x}$

Darstellt die Umgebung von $f(\bar{x})$...



unter der Abbildung f verläßt der Punkt $\bar{x}$ einen Teil seiner unmittelbaren Nachbarn

$\rightarrow f$ ist unkontinuierlich

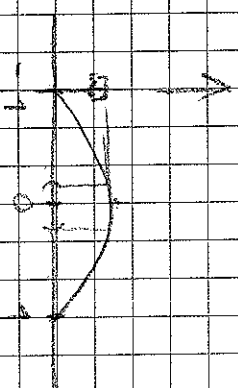
Umgekehrt bedeutet $\forall \epsilon > 0: \exists \delta > 0: B_\epsilon(f(x)) \supset f(B_\delta(x))$

dann stetige Abbildungen bzgl. Nachbarn in umg. Nachbarschaften abbilden

das heißt aber nicht, dass die abgebildeten Nachbarn von $\bar{x}$ das Bild $f(\bar{x})$ umgeben (sie müssen nur in der Nähe sein)

Beispiel: $X, Y = (-1, 1)$, $d(u, v) = |u - v|$ $f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$

$$\delta \leq 1 \quad f(B_\delta(0)) = f((- \delta, \delta)) = (f(0) - \frac{1}{2}\delta^2, f(0)) \quad \text{keine Umgebung von } f(0) \text{ in } (-1, 1)$$



Weitere Charakterisierung der Stetigkeit mit

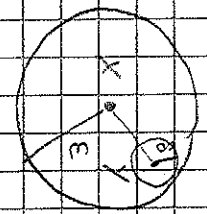
Definition 3.4: Sei (X, d) metrisches Raum und $M \subset X$

- (i) Die Menge aller inneren Punkte von M wird das Interne $\overset{\circ}{M}$ von M genannt.
- (ii) M heißt offen wenn jeder Punkt von M innerer Punkt ist, d.h. $\overset{\circ}{M} = M$
- (iii) $x \in X$ heißt Häufungspunkt (HP) von M , wenn jede Umgebung von x Punkte aus M enthält.
- (iv) Die Menge aller HP von M wird Abschluss $\bar{M}$ von M in X genannt.
- (v) M heißt abgeschlossen, wenn M alle seine HP enthält, d.h. $M = \bar{M}$
- (vi) $x \in X$ heißt Randpunkt von M , falls x HP von M und von $M^c = X \setminus M$ ist.
- (vii) Die Menge aller Randpunkte von M wird Rand ∂M von M genannt.

Beispiele: $B_\varepsilon^0(x) = B_\varepsilon(x) \dots$ Kugeln sind offen, denn $y \in B_\varepsilon(x)$ erfüllt $d(y, x) < \varepsilon$, so dass

für $z \in B_\delta(y)$ mit $\delta = \varepsilon - d(y, x) > 0$ gilt $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + d(y, x) = \varepsilon$

d.h. $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$ d.h. y innerer Punkt, da y beliebig ist $B_\varepsilon^0(x) = B_\varepsilon(x)$



$\dots$ insbesondere offene Intervalle sind offen in $\mathbb{R}$

Frage: Was ist $\partial B_\varepsilon(x)$? Immer gilt $\partial B_\varepsilon(x) \subseteq \{y \in X \mid d(y, x) = \varepsilon\}$

in normierten Räumen: $\partial B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \|y - x\| = \varepsilon\}$

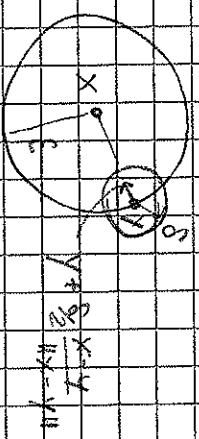
Beweis: $\partial B_\varepsilon(x) \subseteq B_\varepsilon(x)^\circ = \{y \in X \mid d(y, x) > \varepsilon\}$

da $B_\varepsilon(x)$ offen

da y mit $d(y, x) > \varepsilon$ innerer Punkt von $B_\varepsilon(x)^\circ$, ist y kein HP von $B_\varepsilon(x)$ also kein KP

d.h. $\partial B_\varepsilon(x) \subseteq \{y \in X \mid d(y, x) = \varepsilon\}$

Idee für umgekehrte Inklusion in normierten Räumen:



y mit $\|y - x\| = \varepsilon$ hat beliebig

nahe Nachbarpunkte $y + \frac{x-y}{n}$

in $B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$ ist also HP

von $B_\varepsilon(x)$ und $B_\varepsilon(x)^\circ$ d.h. $\mathbb{R}^n$

in normierten Räumen ist damit: $\overline{B_\varepsilon(x)} = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq \varepsilon\}$

... insbesondere sind abgeschlossene Intervalle $[a, b] = \overline{B_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2})}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$

Hier gibt's viele kleine Lemmas ... (Hauptaufgaben)

- M ist offen $\Leftrightarrow M^c$ ist abgeschlossen
 - ∂M ist abgeschlossen
 - $\partial M = \partial(M^c)$
 - $\overline{M} = M \cup \partial M$
 - beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen
 - endliche Schnitte offener Mengen sind offen
 - $X, \emptyset$ sind offen und abgeschlossen in (X, d) ... etc.
- und die Charakterisierung

Satz 3.5 Seien (X, d) , (Y, e) metrische Räume. Die Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn $f^{-1}(B) \subset X$ offen und genau dann, wenn $f(A) \subset Y$ abgeschlossen.

Beweis: Sei f stetig, $B \subset Y$ offen, $x \in f^{-1}(B)$ d.h. $f(x) \in B$, also B Umgebung von $f(x)$, also $f^{-1}(B)$ Umgebung von x (Satz 3.3), also x inneres Punkt von $f^{-1}(B)$, also $f^{-1}(B)$ offen

Sei $A \cap C \cap Y$ offen, $f^{-1}(\emptyset) \subset X$ offen, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$

Da $B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$ offen und $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ offen, gibt es zu $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ so dass $B_\delta(f(x)) \supset f(B_\delta(x))$ d.h. f stetig in x .
von Satz 3.8

Der zweite Teil folgt mit $f^{-1}(U)^c = f^{-1}(U^c)$ und A abg. $\Leftrightarrow A^c$ offen

Diese Charakterisierung erlaubt höchste Verallgemeinerung des Lemmas der Stetigkeit
im allgemeinen Topologie (Theorie der Nachbarschaften)

Definition 3.6: Sei X eine Menge und $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X . Dann heißt τ Topologie auf X und (X, τ) topologischer Raum genau dann, wenn

T1: $\emptyset, X \in \tau$

T2: für $D_1, D_2 \in \tau$ ist $D_1 \cap D_2 \in \tau$

T3: Vereinigungen $\bigcup_{i \in I} D_i$ mit $D_i \in \tau$ und beliebig Indexmenge
sind wieder Elemente von τ

Die Elemente von τ heißen dann offene Mengen in (X, τ) .

Ist (X, d) ein metrischer Raum,
dann heißt $\tau = \{ B(x, r) \mid 0 < r < \infty \}$
die durch d induzierte Topologie auf X .

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum
so nennt man die durch $d(x, y) := \|x - y\|$ induzierte Topologie τ auch Normtopologie.

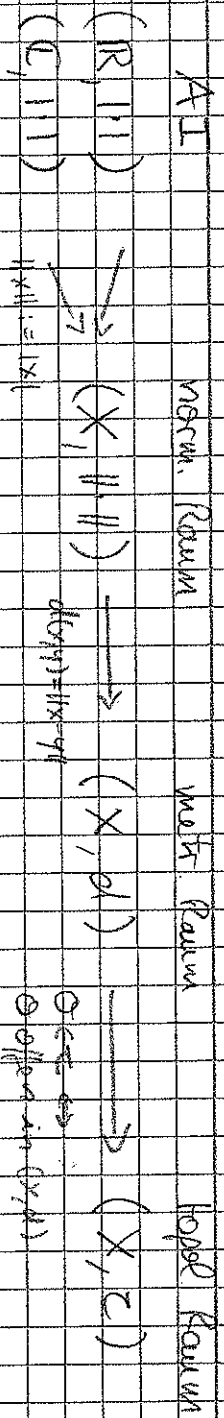
Wegen Satz 3.5 ist folgende Definition eine Verallgemeinerung des Stetigkeitsbegriffs

Definition 3.7: Seien (X, τ) , (Y, η) topologische Räume. Eine Abbildung
 $f: X \rightarrow Y$ heißt stetig wenn für alle $O_Y \in \eta$ gilt $f^{-1}(O_Y) \in \tau$
(d.h. wenn alle Urbilder offener Mengen offen sind)

Satz 3.8 Seien (X, τ) , (Y, η) , (Z, φ) topologische Räume und
einem $g: X \rightarrow Y$, $f: Y \rightarrow Z$ stetig. Dann ist $f \circ g: X \rightarrow Z$ stetig.

Beweis: mit Eigenschaft der Urbildabbildung $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ einfache Konsequenz von Def 3.7. $\square$

Vollgemeinerung



Beschränkt in Def 3.2 " $\exists \epsilon(x) > 0$ für ein $\epsilon > 0$ "

durch " $x \in D \Leftrightarrow$ für ein $D \in \mathcal{C}$ "

dann sind die Begriffe "Umgebung" und "innere Punkt" und damit alle Begriffe aus Def 3.4 in (X, τ) verfügbar. inklusive aller Ergebnisse, die sich nicht konkret auf $\mathbb{R}$ beziehen lassen.