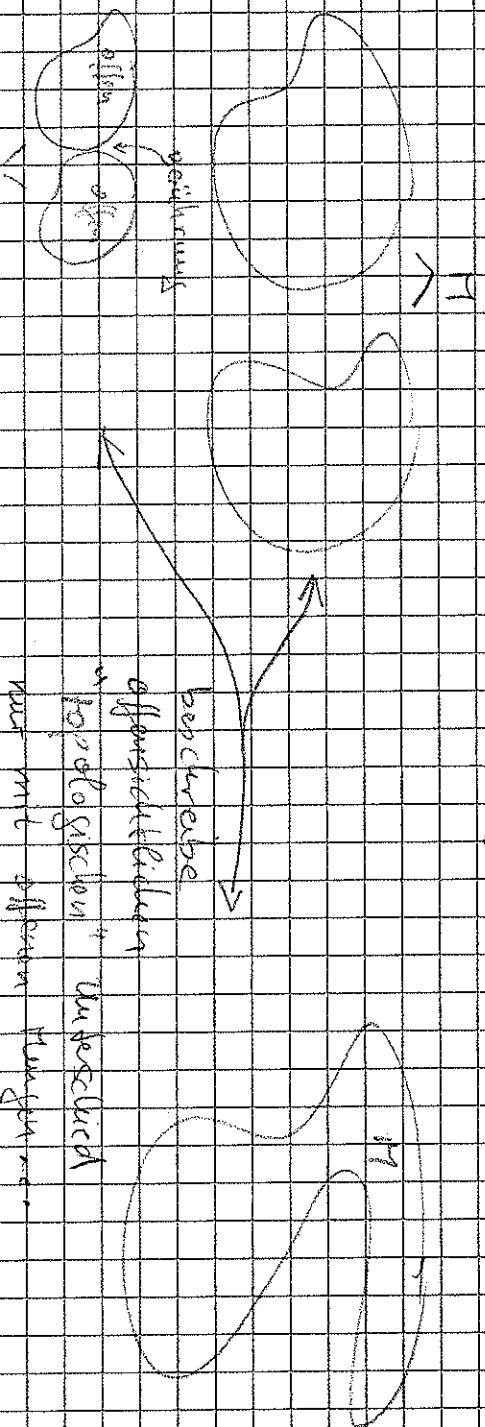


Kapitel 4: Zusammenhangssatz Mengen und der Zwischenwertsatz



zusammenhängend

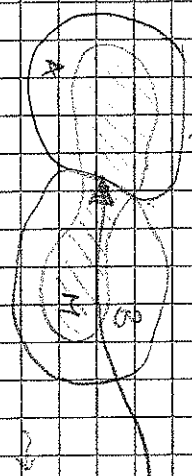
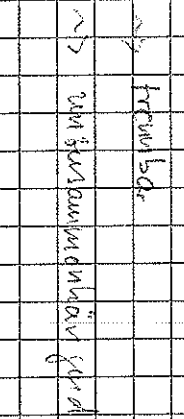
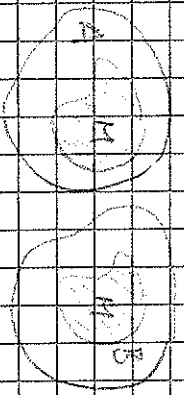
zusammenhängend

Definition 4.1. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. $M \subseteq X$ heißt zusammenhängend

wenn es offene, disjunkte Mengen A, B gibt, so dass $M \cap A, M \cap B \neq \emptyset$

und $M = (M \cap A) \cup (M \cap B)$ gilt. M heißt zusammenhängend, wenn M nicht zerfallbar ist.

ist. (X, τ) heißt zusammenhängend, wenn X zusammenhängend ist.



Beispiel: $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend. $\mathbb{R}$ ist nicht zerfallbar $\rightarrow$ ist zusammenhängend.

Satz 4.2. (Vergemeinschaftungsatz)

Seien (X, τ) , (Y, η) topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ stetig.

Ist (X, τ) zusammenhängend, dann ist $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis:

Ang. $f(X)$ zusammenhängend, d.h. es gibt $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset$, $\overline{A \cap f(X)} \cap \overline{B \cap f(X)} \neq \emptyset$
 und $f(X) = (A \cap f(X)) \cup (B \cap f(X))$ wenn f

Da f stetig, sind $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B) \in \tau$ also offen

außerdem $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \neq \emptyset$ wegen

außerdem $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ wegen

außerdem $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$ wegen d.h. X zusammenhängend ∇

Wor hat das mit dem offenen BWS zu tun?

Quasi z.B. Zusammenhangsregeln in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sind genau die Satz 4.2

Beurteilung (Cont Hausaufgabe)

Aug. Intervall I zusammenhängend d.h.

$$I = \underbrace{(A \cap I)}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(I \cap B)}_{\neq \emptyset}$$

offen, disk.

$$\alpha \rightarrow [a, b] \subset I$$

Definiere $I := \sup \{ t \in [a, b] \mid t \in A \} \in [a, b] \subset I$
 sei $T \notin A$ und $T \in B$ (da A, B offen) also $T \notin I$ $\nsubseteq$

Aug. $I \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend

Definiere J mit $a := \inf J$, $b := \sup J$ also $(a, b), [a, b], [a, b]$
 J nicht leer ob $a, b \in I$ klar: $J \supseteq I$

Aug. $I \neq \emptyset$ dann gibt es $x \in J$ mit $x \notin I$

dann wird I durch offene Teilgen $(a-1, x)$ $(x, b+1)$ getrennt $\nsubseteq$

ein Parameterintervall

Satz 4.3: Sei (X, τ) topologischer Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildung
nach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Sei $x_1, x_2 \in X$ dann
nimmt f alle Werte zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ auf X an

Satz: $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend also ein Intervall I
mit zwei Punkten $f(x_1), f(x_2) \in I$ enthält I auch alle Werte dazwischen

Wo steht der ursprüngliche SMS? $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig nimmt alle Werte

zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

hier: $[a, b]$ "erst" Topologie von $\mathbb{R}^1$

Satz und Definition 4.4. Sei (X, τ) top. Raum und $M \subset X$ dann wird durch

$\tau_M := \{ M \cap U \mid U \in \tau \}$ eine Topologie auf M definiert

die sog. Spalttopologie auf M .

Satz: Hauptsatz.

beachte:

in der Spurtopologie auf $[a, b]$ sind $[a, a+\varepsilon)$ und $(b-\varepsilon, b]$ offen als Schnitt von

$$[a, b] \text{ mit } \mathcal{B}_\varepsilon(\cdot): \begin{array}{ccc} \mathcal{B}_\varepsilon(a) & & \mathcal{B}_\varepsilon(b) \\ \left(\frac{1}{2} \right) & & \left(\frac{1}{2} \right) \\ a & & b \end{array}$$

außerdem ist $[a, b]$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ zusammenhängend und damit auch in der Spurtopologie

$\leadsto [a, b]$ ist zusammenhängender topol. Raum (mit der Spurtopologie)

Wenn $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig dann ist $f([a, b])$ also zusammenhängend (alters Eins)

off. konnate Charakterisierung zusammenhängender Räume:

Satz 4.5 (X, τ) ist zusammenhängend genau dann, wenn $\emptyset, X$ die einzigen Teilmengen sind, die offen und abgeschlossen sind.

Beweis: Folge Äquivalenz: (X, τ) zusammenhängend $\Leftrightarrow$ es gibt $\{A, B, X\} \neq \emptyset, X$ offen und abg.

" $\Leftarrow$ "
nehme $B := A^c$ dann $B \cap X = B \neq \emptyset$, B offen da A abg.

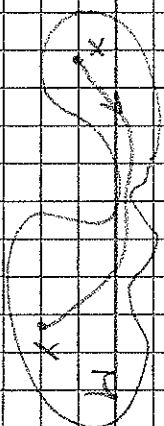
also A, B offen, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = A \cap A^c = \emptyset$ und $X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$

d.h. X zusammenhängend

" $\Rightarrow$ "
es gibt $A, B \subset X$ offen, disjunkt, $A \cap X, B \cap X \neq \emptyset$ mit $X = (X \cap A) \cup (X \cap B) = A \cup B$

d.h. $A = B^c$ d.h. A ist abgeschlossen, offen, nicht leer und nicht X

q) benutze hintende Eigenschaften:



Definition 4.6. Sei (X, τ) topologischer Raum. $M \subset X$ heißt Wegraum von x zu y in M falls M Wegraum von x zu y in M ist.

Wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in M$ eine stetige Funktion

$$\gamma: [a, b] \rightarrow X \quad (\text{einen "Weg"}) \text{ gibt, mit } \gamma(a) = x, \gamma(b) = y \text{ und } \gamma([a, b]) \subset M.$$

Achtung: $[a, b]$ wieder zusammen mit der Spitztopologie von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$!

Satz 4.7: Ist M Wegraum von x zu y in (X, τ) dann ist M zusammenhängend.

Beweis: Wäre M zusammenhängend, dann wähle eine Weg zwischen

zwei Komponenten M_A und M_B . Der Weg wäre dann auch

Wegraum von x zu y in M (Satz 4.2) $\Rightarrow$

Vorsicht: Umkehrung von Satz 4.7 ist falsch $\rightarrow$ Übungsaufgabe