

Kapitel 5: Kompakte Mengen und der Satz vom Minimum und Maximum

In Satz 11.4 A.II (Min/Max) und Satz 11.6 A.II (glw. Stetigkeit) war $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

(a), (b) wurden so benutzt:

beschränkt und abgeschlossen
(b) (a)

(x_n) Folge in D

dann hat $(x_n) \nexists (x_{n_k})$ mit $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in \mathbb{R}$ (Bolzano-Weierstraß braucht Beschränktheit (b))

da $x \notin D$ von D und D abgeschlossen (a) ist $x \in D$

diese "Folgenkompaktheit" beschränkt, abgeschlossen Teilmenge von $\mathbb{R}$ wurde in Satz 11.4 11.6 benutzt

Definition 5.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $D \subset X$ heißt Folgenkompakt

wenn jede Folge $(x_n) \subset D$ eine konvergente $\nexists$ besitzt, deren Grenzwert in D liegt

in metrischen Räumen ist Folgenkompaktheit äquivalent zum allgemeineren Konzept der Kompaktheit

Definition 5.2. Sei (X, τ) ein topologischer Raum, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $M \subseteq X$.

a) $\mathcal{U}$ heißt offene Überdeckung von M falls $M \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ und $M \subseteq U$ ^{forall}

b) Ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M mit $|\mathcal{U}| < \infty$ dann sagt man $\mathcal{U}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung von M .

c) M heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Satz 5.3: In einem metrischen Raum (X, d) sind Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent.

Beweis: Wir zeigen Kompaktheit $\Rightarrow$ Folgenkompaktheit
umgekehrte Implikation kompakter $\dots$ noch zeigen!

Sei also $K \subset X$ kompakt

Ist $x \in K$ und gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$

Dann ist x Grenzwert einer TF von (x_n)

oder es gibt m_j mit $x_{m_j} \in B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ und

sind $m_1 < m_2 < \dots < m_k$ schon konstant mit $d(x_{m_j}, x) < \frac{1}{j}$

wähle $\varepsilon = \min \{d(x_n, x) \mid n \leq m_k, d(x_n, x) > 0\}$ und

$$x_{m_{k+1}} \in B_{\min\{\varepsilon, \frac{1}{k+1}\}}(x) \setminus \{x\}$$

dann $m_{k+1} > m_k$ und $0 < d(x_{m_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$ also $x_{m_k} \rightarrow x$

Ahn kein $x \in K$ ist Grenzwert einer TF von (x_n)

Dann gibt es zu jedem $x \in K$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $x_n \notin B_{\varepsilon_x}(x) \setminus \{x\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

wähle endliche I von $\mathcal{U} = \{B_{\varepsilon_x}(x) \mid x \in K\}$

also $x_n \in K \subset \bigcup_{i=1}^s B_{\varepsilon_{y_i}}(y_i)$ aber $x \notin B_{\varepsilon_{y_i}}(y_i) \setminus \{y_i\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

d.h. $x_n \in \{y_1, \dots, y_s\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ d.h. es gibt $i \in \{1, \dots, s\}$ mit $x_n = y_i$ unendlich oft
 dann ist $y_i \in K$ Grenzwert einer TF von (x_n) $\square$

Eine leicht nachprüfende Charakterisierung kompakter Mengen gibt es in normierten VR $(V, \|\cdot\|)$ mit $\dim V < \infty$

Satz 5.4: (Heine-Borel)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler normierter VR. Dann ist $K \subset V$ genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis: " $\Rightarrow$ " Satz 5.9, " $\Leftarrow$ " Lemma 5.12.

□

Der Satz über glm. Stetigkeit kann man jetzt leicht nachlesen:

Definition 5.5: Seien (X, d) , (Y, e) metrische Räume. Dann heißt $f: X \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig

wenn $\forall \epsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in X: B_\epsilon(f(x)) \supset B_\delta(x)$

Achtung: gleichm. für alle x

(bei allgemeiner Stetigkeit kann δ von x abhängen, $\forall x \in X: \forall \epsilon > 0: \exists \delta > 0: B_\epsilon(f(x)) \supset B_\delta(x)$)

Satz 5.6: Seien (X, d) , (Y, e) metrische Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig und $D \subset X$ kompakt.

Dann ist $f|_D$ gleichmäßig stetig.

Beweis: Kopieren von Satz 11.6 A.II

Statt D betrachte $\mathbb{R}$ benutze D folgenkompakt (folgt aus Kompaktheit + Satz 5.3) $\square$

und oben Satz über Min/Max kann leicht verallgemeinern:

Satz 5.7: Seien (X, τ) , (Y, η) topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt.
Dann ist $f(K)$ kompakt.

Beweis: Sei U offene in $\text{von } f(K)$ also $f(K) \subset \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$

Dann gilt $\bigcup_{V \in \mathcal{U}} f^{-1}(V) \supset K$ d.h. $U \mathcal{U} = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{U}\}$ offene $\mathcal{U}$ von K

sei $\mathcal{U}$ endliche $\mathcal{U}$ in $\text{von } K$ d.h. $K \subset \bigcup_{i=1}^s f^{-1}(V_i)$

Dann $f(K) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^s f^{-1}(V_i)\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^s V_i$ d.h. $\{V_1, \dots, V_s\}$ endliche $\mathcal{U}$ von $f(K)$

Dann $f(K)$ kompakt $\square$

Korollar über Min/Max sind möglich wenn Zielraum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Korollar 5.8: Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und $f: X \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ sei stetig.

Ist X kompakt, dann nimmt f auf X sein Minimum und Maximum an.

Beweis: $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt also beschränkt und abgeschlossen (Satz 9)

$$\sup f(X), \inf f(X) \in \mathbb{R}$$

HP von $f(X)$

damit Elemente von $f(X)$, also $\min f(X), \max f(X)$ existieren $\square$

Beispiel für kompakten topologischen Raum (X, τ) :

$(V, \|\cdot\|)$ normierter, endlich-dim. VR, $X \subset V$ beschränkt und abgeschlossen, z.B. $X = \overline{B_1(0)}$

$d(x, y) := \|x - y\|$ Metrik auf X mit induzierte Topologie τ (= Spurtopologie der Normtopologie)

dann ist (X, τ) kompakter topologischer Raum

Skema: $\mathcal{U}$ offene $\mathcal{U}$ von X d.h. zu $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ gibt es $\tilde{\mathcal{O}}$ offen in V mit $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}} \cap X$

d.h. $f \circ \tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{U}$ ist offene $\mathcal{U}$ von X (bzgl. $(V, \|\cdot\|)$)

d.h. es gibt endliche $\mathcal{I}$ in $f \circ \tilde{\mathcal{O}}_i \mid i=1, \dots, s$ von X (bzgl. $(V, \|\cdot\|)$)

dann $f \circ \mathcal{O}_i \mid i=1, \dots, s$ endliche $\mathcal{I}$ von X (bzgl. (X, τ))

also X kompakt $\square$

Damit enthält Korollar 5.8 Satz 19.4 Alt dass $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ beschränkt & abgeschlossen ist mit der Spurtopologie

komp. top. Raum

Auffüllen von Lücken

Satz 5.9 Sei (X, d) ein metrisches Raum und $K \subset X$ kompakt.

Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig.

Betrachte $\mathcal{U} = \{B_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Für jedes $x \in K$ gibt es n mit $x \in B_n(x)$ also $\mathcal{U}$ offene $\mathcal{U}$ von K .

Da K kompakt gibt es endliche $T \subset \mathcal{U}$ mit

$$\mathcal{U} = \{ B_{\eta_i}(\bar{x}) \mid \eta_i \in \mathbb{N} \quad i=1, \dots, s \}$$

$$K \subset \bigcup_{i=1}^s B_{\eta_i}(x)$$

$$B_{\max_{i=1}^s \eta_i}(\bar{x})$$

d.h. K ist beschränkt

→ Endlichkeit von $\mathcal{U}$ wichtig!

Nir zeigen weiter: K^c ist offen

Sei $x \in K^c$. Für $y \in K$ gilt $\frac{1}{2}d(x,y) = \varepsilon_y > 0$ d.h. $B_{\varepsilon_y}(x) \cap B_{\varepsilon_y}(y) = \emptyset$

Wähle $\mathcal{U} = \{ B_{\varepsilon_y}(y) \mid y \in K \}$ d.h. offene $\mathcal{U}$ von K

hat endliche Überdeckung $\mathcal{U} = \{ B_{\varepsilon_{y_i}}(y_i) \mid i=1, \dots, s \}$

mit $\varepsilon_i = \min \{ \varepsilon_{y_1}, \dots, \varepsilon_{y_s} \} > 0$ ist

$$B_\varepsilon(x) \cap K \subset B_\varepsilon(x) \cap \bigcup_{i=1}^s B_{\varepsilon_{y_i}}(y_i)$$

$$= \bigcup_{i=1}^s B_\varepsilon(x) \cap B_{\varepsilon_{y_i}}(y_i)$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^s B_{\varepsilon_{y_i}}(x) \cap B_{\varepsilon_{y_i}}(y_i) = \emptyset$$

also $B_\varepsilon(x) \subset K^c$ d.h. K^c offen

also K abgeschlossen



Bedingung ist $K \subset A$, nicht hinreichend

Beispiele:

N , diskrete Metrik:

$N = B_2(1)$ beschränkt ✓ N abg. ✓

$U = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ offene U .

ohne endliche $\overline{U}$

$X = \{0, 1\}$ mit $d(x, y) = |x - y|$
(Spurtopologie von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$)

$X = B_2(\frac{1}{2})$ beschränkt ✓ X abg. ✓

$U = \{ (\frac{1}{n}, 1) \mid n \in \mathbb{N} \}$ offene U
ohne endliche $\overline{U}$

Bedingung ist hinreichend in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

Satz 10: Sei K beschränkt und abgeschlossen in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Dann ist K kompakt

Beweis: $M = \overline{B_R(0)}$ ist beschränkt & abgeschlossen

Sei $(x^{(m)})$ Folge in M dann ist $(x_1^{(m)}) \in [-R, R]$

da $[-R, R]$ folgenkompakt hat $(x_1^{(m)})$ konv. TF $(x_1^{(m_k)})$

Da $(x_2^{(m_k)}) \subset [-R, R]$ gibt es konv. TF $(x_2^{(m_{k_l})})$

etc., also insgesamt TF $(x^{(k_{l_l})})$ mit $x_i^{(k_{l_l})} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} x_i$ $i=1, \dots, n$

daher $x^{(k_{l_l})} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \bar{x}$ in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (Konsequenz von Satz 2.5)

also M folgenkompakt.

Da K beschränkt ist es $\mathbb{R} > 0$ mit $K \subset \overline{B_{\mathbb{R}}(0)}$

Sei (x_n) Folge in K

Da K hat (x_n) konv. TF (x_{n_k}) mit $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in \overline{B_{\mathbb{R}}(0)}$

Da $x \in K$ und K abgeschlossen ist $x \in K$ also K folgenkompakt

Lemma 5.11: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|_{\infty}$

Inbesondere sind die beschränkten und abgeschlossenen Mengen in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ kompakt und alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ induzieren die gleiche Topologie.

Beweis: Mit Dreiecksungleichung gilt man wie in Lemma 5.5 AI

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Außerdem gilt $\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right) \|x\|_{\infty}$

(
 $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$
 $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$
 $\vdots$
 $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0)$
 $\vdots$
 $e_n = (0, 1, 0, \dots, 0)$

C

also $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty}) \xrightarrow{C} (\mathbb{R}, |\cdot|)$ Lipschitzstetig $|\|x\| - \|y\|| \leq C \|x - y\|_{\infty}$

da $\partial B_1(0)$ kompakt in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (Lemma 5.11)

nimmt $\|\cdot\|$ auf $\partial B_1(0)$ Minimum an (Lemma 5.8)

d.h. $\|x\| \geq \underbrace{\|x_{\min}\|}_{=1c} > 0$ da $0 \notin \partial B_1(0) \Rightarrow x_{\min}$

d.h. für $x \neq 0$ ist $\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq c$ also $\|x\| \geq c \|x\|_\infty$

(für $x=0$ separately)

daher $c \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C \|x\|_\infty$ d.h. $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty$

äquivalente Normen induzieren gleiche Topologie, ... gleiche Mengen sind kompakt / beschränkt /

Sind $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, dann ist $c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq C_1 \|x\|_\infty$ $c_1=1, C_1=2$

also $\frac{1}{C_1} \|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_\infty \leq \frac{C_2}{c_1} \|x\|_1$ d.h. $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$

Beweis: angeleitete Übung

Lemma 5.12 Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter VR mit dem $V \neq \emptyset$ und $K \subset V$ beschränkt und abgeschlossen. Dann ist K kompakt. Jede andere Norm auf V ist zu $\|\cdot\|$ äquivalent.

Beweis: Für $V = \mathbb{R}^n$ siehe Lemma 5.11.

Übertragung auf beliebigen VR mit dem $V \neq \emptyset$ durch angeleitete Übung.