

Kapitel 6: Lösen von Gleichungen I

Sei (X, d) metrischer Raum, $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig

Gesucht: Lösung von $\phi(x) = 0$

Idee: Verallgemeinerung des Intervallhalbierungsverfahrens

- Finite Stadmenge $I_1 \subset X$ kompakt mit $\phi|_{I_1}$ hat wechselnde Vorzeichen $n=1, \dots, n$

- Induktiv: suche $I_{k+1} \subset I_k$ abg mit $\text{diam } I_{k+1} \leq q \cdot \text{diam } I_k$ und $\phi|_{I_{k+1}}$ hat wechselnde Vorzeichen $n=1, \dots, n$

woher $\text{diam } A = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ und $q < 1$

"Durchmesser" bzw "Diameter" von A

Satz 6.1: (Intervallschachtelung)

Sei (X, τ) topolog. Raum und $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht leer, abgeschlossen, ineinander geschachtelter (d.h. $I_n \supset I_{n+1}$) Mengen. Ist I_1 kompakt, dann ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$

Beweis: Ann $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$ dann $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n^c = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \right)^c = \emptyset^c = X \supset I_1$

also $\mathcal{U} = \{I_n^c \mid n \in \mathbb{N}\}$ offen? offene Überdeckung von I_1

mit endlicher Teilüberdeckung $\mathcal{U}' = \{I_{n_k}^c \mid k=1, \dots, s\}$ folgt

$$I_{\max k} \subset I_1 \subset \bigcup_{k=1}^s I_{n_k}^c = I_{\max k}^c \Rightarrow I_{\max k} = \emptyset \quad \blacksquare$$

angewendet auf verallgemeinertes Intervall nach Bisektionsverfahren:

$$\bar{x} \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \text{ existiert}$$

$$\phi_i(y_k^+) > 0, \quad \phi_i(y_k^-) < 0 \quad \text{mit} \quad y_k^+ \in \partial I_k$$

$$\text{wegen} \quad \bar{x} \in I_k \quad \text{ist} \quad d(y_k^+, \bar{x}) < \text{diam } I_k < \underbrace{q^k \text{ diam } I_1}_{< \infty} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

(komp. Mengen sind beschr.)

$$\text{Somit} \quad y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x}$$

$$\text{also} \quad \phi_i(\bar{x}) = \lim \phi(y_k^+) \geq 0 \quad \leadsto \quad \phi_i(\bar{x}) = 0 \quad \quad \quad i=1, \dots, n \quad \leadsto \quad \phi(\bar{x})=0$$

$\parallel \leftrightarrow$ Stetigkeit

$$\lim \phi(y_k^-) \leq 0$$

Nachteil

es gibt keine universelle Methode geeignete I_k zu konstruieren
daher Intervallschachtelung meist von theoretischem Interesse

Eine konstruktive Methode gibt es für Gleichungen vom Fixpunkttyp

finde $x \in X$ mit $\phi(x) = x$ (ein sog. Fixpunkt von ϕ)

wenn ϕ eine kontrahierende Selbstabbildung ist

Definition 6.2 Sei (X, d) ein metrischer Raum. $\phi: X \rightarrow X$ heißt

kontrahierende Selbstabbildung, wenn eine Konstante $0 \leq q < 1$ existiert

so dass $d(\phi(x), \phi(y)) \leq q d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Bem: - kontrahierende Abbildungen sind Lip-schitz mit Konstante $q < 1$

- Kontrahierungseigenschaft bei gegebenem ϕ oft nur auf Teilmengen $M \subset X$

beweisbar ... dann ist auch das Finden einer Teilmenge $X \subset M$

schwierig, so dass $\phi(X) \subset X$ gilt (Selbstabbildung)

wenn's lagert ist $\phi|_X: X \rightarrow X$ kontrahierende Selbstabbildung

Satz 6.3 (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\phi: X \rightarrow X$ eine kontraktive Selbstabbildung. Dann gibt es genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in X$ von ϕ . Dieser kann als Grenzwert der Fixpunktiteration $x_{n+1} = \phi(x_n)$; $x_0 \in X$ beliebig gefunden werden mit der a-priori Fehlerabschätzung $d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_n, x_0)$ wobei $q < 1$ der Kontraktionsfaktor von ϕ ist.

Beweis: Schritt 0: $d(x_{n+1}, x_n) = d(\phi(x_n), \phi(x_{n-1})) \leq q d(x_n, x_{n-1}) \leq q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2})$
 $\leq \dots \leq q^n d(x_1, x_0)$
 (Induktion)

Schritt 1: (x_n) ist CF; Sei $m = n+k$

$$d(x_m, x_n) = d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$

↑
dreifache A's Regel

$$\text{(Schritt 2)} \quad \leq (q^{n+k-1} + \dots + q^n) d(x_1, x_0) \leq q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k d(x_1, x_0) = \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(x_n) CF

daher (Vollständigkeit!) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$

Schritt 2: $\bar{x}$ ist FP davon

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \phi(\bar{x})) &\leq d(\bar{x}, x_n) + d(x_n, \phi(\bar{x})) = d(\bar{x}, x_n) + d(\phi(x_{n+1}), \phi(\bar{x})) \\ &\leq d(\bar{x}, x_n) + q d(x_n, x_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{also } d(\bar{x}, \phi(\bar{x})) = 0 \quad \text{also } \bar{x} = \phi(\bar{x}). \end{aligned}$$

Schritt 3: Eindeutigkeit

$$\begin{aligned} \text{Ann } x_1, x_2 \text{ FP} \quad \text{dann } d(x_1, x_2) &= d(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq q d(x_1, x_2) \Rightarrow \underbrace{(1-q)}_{>0} d(x_1, x_2) \leq 0 \\ &\Rightarrow d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Schritt 4: Fehlerabschätzung

$$d(\bar{x}, x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \quad (\text{Schritt 1})$$

FP-Iterationen werden in der Praxis zur Approximation von Lösungen genutzt.