

Kapitel 7: D: lineare Abbildungen auf unendlichdimensionalen VR

Seien U, V normierte VR, $\dim U, \dim V < \infty$

Besonders gut verständene Abbildungen:

$$T(u) = L(u) + c \quad \leftarrow \text{lineare Abb. von } U \text{ nach } V$$

Element von $\mathcal{L}(U, V)$: lineare Abb. von U nach V

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2)$$

$$u_1, u_2 \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

algorithmisch überprüfbar!

- T injektiv $\iff \text{Kern } L = \{0\}$
- T surjektiv $\iff \text{rang } L = \dim V$
- T bijektiv $\iff \dim V = \dim U$ & $\text{Kern } L = \{0\}$

Lösungstheorie zu $T(u) = v$ vorhanden (Gauß-Algorithmus etc.)

außerdem (Übungen): T ist Lipschitz-stetig und

Auswertung $v = T(u)$ entspricht

endlich viele Additionen und Multiplikationen mit Konstanten (v. einfach!), denn

$u_1, \dots, u_n$ Basis von U

$v_1, \dots, v_m$ Basis von V

Koordinaten der Bilder der Basisvektoren

$$u = \sum_{j=1}^n x_j u_j$$

$$L(u) = \sum_{j=1}^n x_j L(u_j)$$

$$L(u_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij} v_i$$

$$c = \sum_{i=1}^m b_i v_i$$

$\Leftrightarrow$ Koordinaten von x

$$T(u) = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j + b_i$$

y_u

Koordinaten von $v = T(u)$

$$u \xrightarrow{T} v$$

Koordinaten bzgl.

Koordinaten bzgl. $v_1, \dots, v_m$

Matrixprodukt:

$$(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$n \times 1$ -Matrix

$m \times 1$ -Matrix

$m \times n$ -Matrix

enthält in den Spalten

die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren

Form in Matrixschreibweise

$$y = Ax + b$$

Differenzierbare Funktionen sind die Funktionen, die lokal sehr gut durch affine lineare Abbildungen approximierbar sind... und daher lokal sehr gut verstehbar sind

Definition 7.1a: Seien $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ normierte endlichdimensionale Vektorräume und $\emptyset \neq X \subset U$ offen.

Dann heißt $f: X \rightarrow V$ an der Stelle $x \in U$ differenzierbar genau dann, wenn f bei x durch eine affine lineare Abbildung $T(x) = f(x) + L(x)$ mit $L \in \mathcal{L}(U, V)$ so gut angenähert werden

kann, d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - T(x)h\|_V}{\|h\|_U} = 0 \quad \text{gilt.}$$

Satz und Def 7.1b: Die Abbildung L in Def. 7.2. ist eindeutig festgelegt und wird (totale) Ableitung von f an der Stelle x genannt (kurz $f'(x)$ oder $df(x)$)

Beweis: Ann: $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ ermöglichen mit $T_i(h) = f(x) + L_i(h)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - T_1(h)\|_V}{\|h\|_U} = 0 \quad i=1,2$$

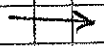
Sei $D := T_1 - T_2 = L_1 - L_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ also $D(0) = 0$

aufserdem gilt für $u \neq 0$: $D(u) = \|u\|_U D\left(\frac{u}{\|u\|_U}\right) = \|u\|_U D\left(\frac{1}{\|h_n\|_U}\right) = \|u\|_U \frac{1}{\|h_n\|_U} D(h_n)$

$h_n := \frac{1}{n}u \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$= \|u\|_U \left(\underbrace{\frac{f(x+h_n) - T_2(h_n)}{\|h_n\|_U}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\frac{f(x+h_n) - T_2(h_n)}{\|h_n\|_U}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \right)$$

also $D = 0$ d.h. $L_1 = L_2$



betrachte $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - T_2(h)\|_V}{\|h\|_U} = 0$

bedeutet: für alle Nullfolgen (h_n) im Definitionsbereich

von $h \mapsto \frac{\|f(x+h) - T_2(h)\|_V}{\|h\|_U}$

also in $\{h \in U \setminus \{0\} \mid x+h \in X\} \neq \emptyset$ da X offen!

ist Grenzwert dann $\frac{\|f(x+h_n) - T_2(h_n)\|_V}{\|h_n\|_U} = 0$

Definition 7.1c: f heißt differenzierbar, wenn f an jeder Stelle $x \in X$ differenzierbar ist.

Die Abbildung $f' : X \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$ wird dann erste Ableitung von f auf X genannt.

Beispiel: $f : U \rightarrow V$ affin linear ist differenzierbar mit $f'(x) = 1$ für alle x
 $x \mapsto L(x) + c$
 (erste Ableitung ist konstant)

Probe: $T(h) = f(x) + L(h) = L(x) + c + L(h) = L(x+h) + c = f(x+h)$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|_U} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \checkmark$$

Beispiel $T_x : \mathbb{R}^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ linear $\mapsto T'_x(x) = T'_x$
 $x \mapsto x_1$

Regel: Differenzierbarkeit (und Stetigkeit) prüft man oft mit "Satzkettenprinzip" und "Leibniz-Regel".

Beispiel $P(x) = 3x_1^2 x_2 + 5x_3 x_2^2$ mehrdim. Polynom auf $\mathbb{R}^{3 \times 1}$

(Zerlegungssatz) $= 3 \Pi_1(x) \cdot \Pi_1(x) \cdot \Pi_2(x) + 5 \Pi_3(x) \cdot \Pi_2(x) \cdot \Pi_2(x)$ Produkt/Summen
 ableiten
 ableiten

Satz 7.2 Seien U, V endlich dim. VR, $X \subset U$ offen, $x \in X$, $f, g: X \rightarrow V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1st f diffbar in x , dann ist f stetig in x

• Sind f, g stetig in x , dann auch $\alpha f + \beta g$

• Sind f, g diffbar in x , dann auch $\alpha f + \beta g$ und $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

ISI $V = \mathbb{R}$ dann gilt weiter

• Sind f, g stetig in x , dann auch $f \cdot g$ und f/g falls $g(x) \neq 0$

• Sind f, g diffbar in x , dann auch $f \cdot g$ mit $(f \cdot g)'(x) = g(x) f'(x) + f(x) g'(x)$

und f/g falls $g(x) \neq 0$ mit $(f/g)'(x) = (g(x) f'(x) - f(x) g'(x)) / g(x)^2$

ISI $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ dann gilt für $F: X \rightarrow \mathbb{R}^{(n+m) \times k}$

$$x \mapsto (f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x) \ g_1(x) \ g_2(x) \ \dots \ g_m(x))^T$$

• Sind f, g stetig in x dann auch F

• Sind f, g diffbar in x dann auch F mit $F'(x)(h) = (f_1'(x)(h) \ \dots \ f_n'(x)(h) \ g_1'(x)(h) \ g_2'(x)(h) \ \dots \ g_m'(x)(h))^T$

Beispiel 1 wie in A11... Ideen:

brachte
Permutation,
Skalar x lin. Abb.

rule

$$\Delta_h f := f(x+h) - f(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow f \text{ stetig in } x$$

$$\frac{\Delta_h f - f'(x)h}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow f \text{ diffbar in } x$$

und $\Delta_h f = \frac{1}{\|h\|} \left(\Delta_h f - f'(x)h \right) + f'(x)h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)h = 0 \quad (\text{Lin Abb stetig})$

$$\Delta_h (\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta_h f + \beta \Delta_h g$$

$$\Delta_h (fg) = g(x) \Delta_h f + f(x) \Delta_h g + \Delta_h f \Delta_h g$$

$$\Delta_h (1/g) = -\Delta_h g / (g(x)g(x+h))$$

$$\Delta_h f = (\Delta_h f, \dots, \Delta_h g_m)$$

① durch sind Funktionen, Polynome, Affine

involutions rationale Funktionen

Für Funktionen vom Typ $f(x) = e^{x_1 x_2} \sin x_3 \quad x \in \mathbb{R}^3$

bereite man

- Kettenregel
- AI-Differential $\hat{=} D_x f(1,1)$ Differential

Erinnerung an Satz AT

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ AT-diffbar in $x \in X$

$$\Leftrightarrow f(x+h) = f(x) + L \cdot h + \|h\| r_1(h) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nwarrow \\ r_1(0) = 0, r_1 \text{ stetig in } 0 \end{matrix}$$

Die gleiche Aussage gilt auch bei Diffbarkeit nach Def 7.1

Lemma 7.1. Seien U, V endlichdimensionale VR und $X \subset U$ offen.

Dann ist f in $x \in X$ diffbar mit Ableitung $LC_Z(U, V)$ genau dann, wenn es eine in 0 stetige Funktion r_1 gibt mit $r_1(0) = 0$ so dass

$$f(x+h) = f(x) + Lh + \|h\| r_1(h)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h) - \underbrace{f(x)}_{=f(x)} + Lh}{\|h\|} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x) + Lh}{\|h\|} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x) + Lh}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} r_f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ diffbar} \end{aligned}$$

$$r_f(h) := \begin{cases} \frac{f(x+h) - f(x) + Lh}{\|h\|} & h \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$$

ist stetig in $h=0$

um zu zeigen Konsequenzen:

- $f^{(p,q)}$ (h) = $f^{(k,q)}$ (h) ... wir können schreiben $f^{(k,q)}$ mit der Zahl $f^{(k,q)}$
- f ist k -mal diffbar

Satz 7.5: Seien U, V und W VR, $X \subset U$ offen, $g: X \rightarrow V$ diffbar in x

$Y \subset V$ offen, $g(x) \in Y$, $f: Y \rightarrow W$ diffbar in $g(x)$

Dann ist $f \circ g: X \rightarrow W$ diffbar in x und

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x)$$

Beweis: wie in 7.4 mit Lemma 7.4

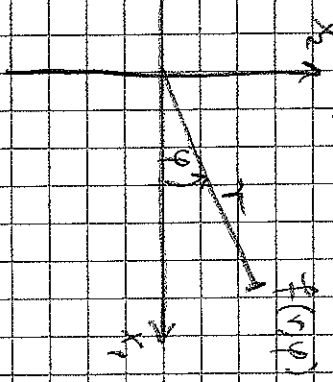
Vereinfachte Version Abb

$f(x) = e^{x_1 x_2} \sin x_3 = \underbrace{(\exp \circ P)}_{\text{diff'bar}} \cdot \underbrace{(\sin \circ \Pi_3)}_{\text{diff'bar}}(x)$
 wobei Stetigkeit / Diff'barkeit mit "Zerlegungssatz" sofort erkennbar

$P(x) = \Pi_1(x) \cdot \Pi_2(x)$ diff'bar

$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ "Polarkoordinaten" - Abbildung

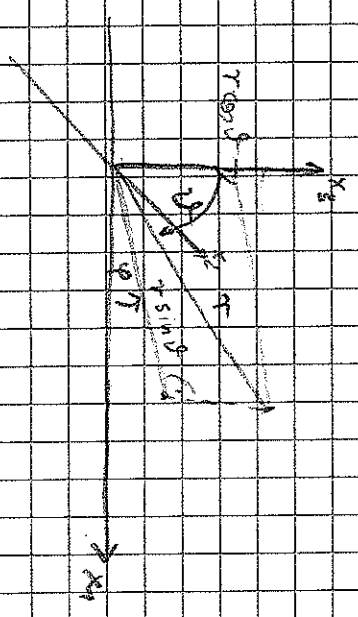
berechne $f = \begin{pmatrix} \Pi_1 \circ (\cos \circ \Pi_2) \\ \Pi_1 \circ (\sin \circ \Pi_2) \end{pmatrix}$ Komponenten diff'bar, Hintereinandersetzung diff'bar
 $\Pi_1(r, \varphi) = r$ diff'bar da linear
 $\Pi_2(r, \varphi) = \varphi$



genauso für "Kugelkoordinaten" - Abbildung

$f(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (r, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3$

diff'bar



Es folgt noch eine Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 7.6: Seien U, V euklidischen VR und $X \subset U, Y \subset V$ offen.

Weiter sei $f: X \rightarrow Y$ invertierbar mit inverser Funktion f^{-1} .

Ist f in $x \in X$ differenzierbar und f^{-1} in $y = f(x)$, dann gilt die Zusammenhang

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$$

Beweis: da $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in X$

gilt

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = \text{id}_U'(x) = \text{id}_U$$

$\uparrow$
da $\text{id}_U \in \mathcal{L}(U, U)$

andereits folgt mit der Kettenregel: $(f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x)$

und damit $(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$ $\square$

Bem. zur Differenzierbarkeit von f^{-1} :

$$\underbrace{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}_{=: k} = (f'(x))^{-1} \left(\underbrace{f(x+k) - f(x)}_{= y+h} \right)$$

$$= (f'(x))^{-1} (f(x+k) - f(x))$$

außerdem ist

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig

oder

$$g(k) \approx g(k_{\min})$$

(Satz v. Min/Max)

$$k \mapsto \|f'(x)k\|$$

$$\partial_{\mathcal{B},0}$$

hier $g(k_{\min}) = 0$ dann $k_{\min} \in \text{Kern } f'(x) = f_0$ d.h. $\|0\| = 1$ &.

$$\text{also } \|f'(x) \frac{k}{\|k\|}\| \geq g(k_{\min}) > 0 \text{ für alle } k \neq 0$$

und damit

$$\| \frac{f(x+k) - f(x)}{\|k\|} - f'(x) \frac{k}{\|k\|} \| \geq \| f'(x) \frac{k}{\|k\|} \| \geq g(k_{\min})$$

$$k \rightarrow 0$$



wenn $\|k\|$ hinreichend klein

$$\frac{\|k\|}{\|k\|}$$

es gilt also

$$\|f'(y+h) - f'(y) - (f'(x))^{-1}h\| \leq \frac{\|h\|}{\|f'(x)\|} \|f'(x+h) - f(x) - f'(x)h\|$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{\|f'(x)\|}}_{\leq \frac{1}{g(u_{\min})}} \underbrace{\|f'(x+h) - f(x) - f'(x)h\|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$$

← wenn $\|h\|$ klein

d.h. Differenzierbarkeit von f^{-1} in $f(x)$ folgt, wenn

$$v = f'(y+h) - f'(y) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

also wenn f^{-1} stetig ist in $\underline{y = f(x)}$

Satz 7.7. Seien (X, d) , (Y, e) metrische Räume, $f: X \rightarrow Y$ umkehrbar und stetig

gibt es zu jedem $y \in f(X)$ eine Umgebung A mit $f^{-1}(A)$ kompakt, dann ist f^{-1} stetig.