

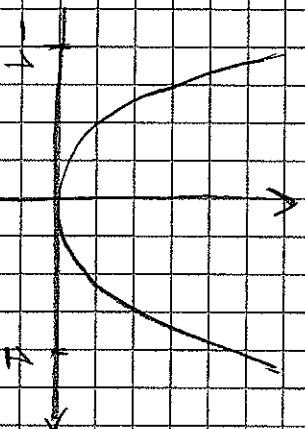
# Kapitel 8: Richtungsableitungen und partielle Ableitungen

Definition 8.1: Sei  $U$  ein Vektorraum. Unter einer glatten Kurve in  $U$  verstehen wir eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 5] \rightarrow U$  die in  $(0, 5)$  differenzierbar ist.

Schulbeispiel:  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$

"Normalparabel"

glatte Kurve in  $\mathbb{R}^{2 \times 1}$

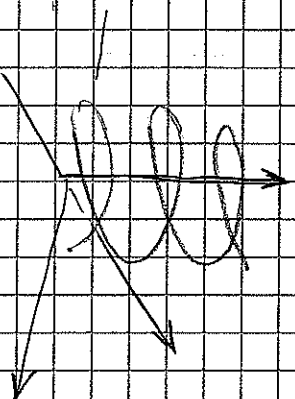


"Schraubenlinie"

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 6\pi]$$

Strecke zwischen  $x$  und  $y$  in  $U$

$$\gamma(t) = x + t(y-x) \quad t \in [0, 1]$$



Geradenstück in Richtung  $\xi$

↙ Richtungsvektor

$$\gamma(t) = x + t\xi, \quad t \in [0, b]$$

beachte:  $\gamma'(t) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$

$$\gamma'(t)(h) = \gamma'(t)(h \cdot 1) = h \underbrace{\gamma'(t)(1)}_{\in U}$$

$$\frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t) - h\tau\|}{|h|} = \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{h} = \tau \left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\|$$

folgt sofort

Satz und Def 8.2. Sei  $U$  ein VR und  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ . Dann ist  $\gamma$  diffbar in  $t \in (a, b)$  genau dann, wenn es einen Vektor  $\tau \in U \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$  (den sog. Tangentenvektor), so dass

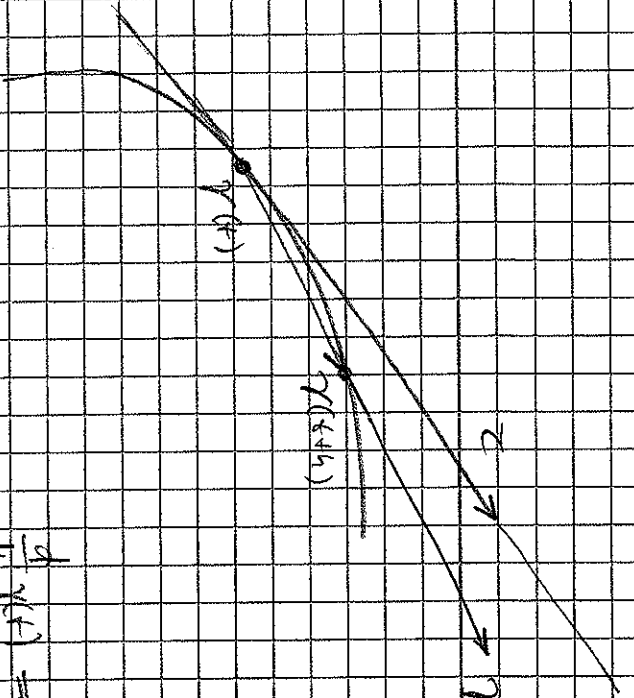
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \tau =: \frac{d}{dt} \gamma(t)$$

Es gilt dann  $\gamma'(t)(h) = h\tau$  für  $h \in \mathbb{R}$ . Der Tangentenvektor  $\tau = \gamma'(t)(1)$  wird oft auch mit  $\gamma'(t)$  bezeichnet (d.h. ist  $\gamma'(t) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$  identifiziert)

$$T(h) = \gamma(t) + \gamma'(t)(h) = \gamma(t) + h \cdot T$$

"Tangente"

$$\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$



Berechnung der Tangente wenn  $U = \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\gamma' \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

$$= \begin{pmatrix} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h} \\ \vdots \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

oder auch mit Satz 7.2

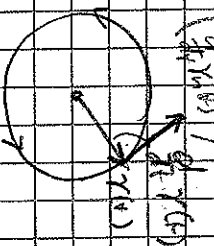
$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \cos t \\ \frac{d}{dt} \sin t \end{pmatrix}$$

$$\gamma(t) \cdot \frac{d}{dt} \gamma(t) = \cos t (-\sin t) + \sin t \cos t = 0$$

Standard Skalarprodukt

also  $\frac{d}{dt} \gamma(t) \perp \gamma(t)$

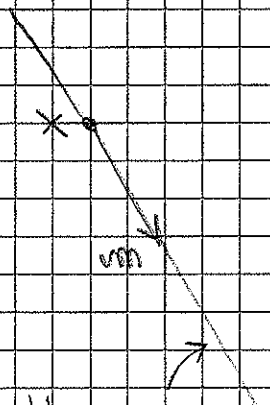
$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$



# Konzept der Richtungsableitung

mit Ableitungen

Untersuche  $f: U \rightarrow V$  an der Stelle  $x \in U$  in Richtung  $\xi \in U$



zugehörige Gerade beschreiben durch  $\gamma(t) = x + t\xi$   $t \in \mathbb{R}$

mit Tangentialvektor  $\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + t\xi + h\xi - x}{h}$

Taylorreihe entlang der Geraden sind gegeben durch  $(f \circ \gamma)(t) = f(x + t\xi)$

$= \xi$

Definition 8.3 Seien  $U, V$  endlichdim. VR,  $x \in U$  offen,  $x \in X$  und  $f: U \rightarrow V$

Für  $\xi \in U$  und  $\varepsilon > 0$  sei  $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$  mit  $\gamma(t) = x + t\xi$

Ist  $t \mapsto (f \circ \gamma)(t)$  in  $t=0$  differenzierbar, dann nennt man

$$\frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x + t\xi) \Big|_{t=0} =: \partial_{\xi} f(x)$$

die Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $x$  in Richtung  $\xi$

Mit der Kettenregel folgt sofort:

Satz 8.4: Seien  $U, V$  endlich dim. VR und sei  $X \subset U$  offen mit  $x \in X$ .  
 Ist  $f: X \rightarrow V$  diffbar in  $x$  dann existieren alle Richtungsableitungen  
 von  $f$  in  $x$  und es gilt

$$\partial_{\xi} f(x) = f'(x)(\xi)$$

Beweis:  $\gamma(t) = x + t\xi$  erfüllt  $\gamma'(0)(h) = h\xi$

$$(f \circ \gamma)'(0)(h) = (f'(\gamma(0)) \circ \gamma'(0))(h) = f'(\gamma(0))(\gamma'(0)(h)) = h f'(\gamma(0))(\xi)$$

Wegen Satz 8.2 existiert  $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \Big|_{t=0} = (f \circ \gamma)'(0)(1) = f'(\gamma(0))(\xi)$   
 mit Def 8.3:  $\partial_{\xi} f(x) \stackrel{||}{=} f'(\gamma(0))(\xi)$   $\stackrel{||}{=} f'(x)(\xi)$

Satz 8.4 gibt anschauliche Bedeutung der Ableitung  $f'(x)$  da er die

Funktionswerte  $f'(\xi)(\xi)$ ,  $\xi \in U$  erklärt - es sind die Richtungsableitungen von  $f$  an der Stelle  $x$  in Richtung  $\xi$

Achtung:

$f$  total differenzierbar

Satz 8.9

$\Rightarrow$  alle Richtungsableitungen existieren

— " —

$\Leftarrow$

— " —

Übung

Definition 8.5.

Sei  $X \subset \mathbb{R}^{n \times 1}$  offen,  $x \in X$ ,  $V$  ein endlich-dim VR und  $f: X \rightarrow V$ .

Existiert die Richtungsableitung an der Stelle  $x$  in Richtung  $e_i = (0 \dots 0 \overset{i}{1} 0 \dots 0)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

so nennt man  $f$  an der Stelle  $x$  in der  $i$ -ten Variable partiell differenzierbar

und  $\partial f(x)$  die partielle Ableitung in Richtung  $e_i$  (Symbol  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ )

Im Fall  $U = \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $V = \mathbb{R}^{m \times 1}$  identifizieren wir  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times 1}, \mathbb{R}^{m \times 1})$

mit der zugehörigen Matrix  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in dem kanonischen Isomorphismus  $\mathbb{R}^{n \times 1} \cong \mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^{m \times 1} \cong \mathbb{R}^m$

von  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  bzw.  $\mathbb{R}^{m \times 1}$

Es gilt dann

$$L(x) = \uparrow_x$$

Bem.: sehr oft lässt man bei linearen Abb.

die Klammern wie das Argument weg

dann  $Lx = \uparrow_x$

Matrixprodukt

Ist  $f: \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times 1}$  diffbar in  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  dann kann  $f'(x)$  sowohl als Matrix betrachtet werden

(die sog. Jacobimatrix von  $f$  an der Stelle  $x$ )

Was steht in dieser Matrix?

$f'(x)_i$  ist  $i$ -te Komponente der  $j$ -ten Spalte von  $f'(x)$

$$f'(x)_i e_j = \partial_j f(x) = \frac{d}{dt} f(x + t e_j) \Big|_{t=0}$$

Wegen stehen die partiellen Ableitungen von  $f$  in den Spalten von  $f'(x)$

$$\text{wird } f'(x)_i = \frac{d}{dt} f(x + t e_j) \Big|_{t=0} = \partial_j f_i(x)$$

$$\text{also } f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \dots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}$$

Merksatz:

$$\mathbb{R}^{m \times 1} \ni f(x+t h) \approx f(x) + \underbrace{\left( \underbrace{f'(x)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \underbrace{h}_{\in \mathbb{R}^{n \times 1}} \right)}_{\in \mathbb{R}^{m \times 1}}$$

$$\text{ist } f'(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\text{wenn } f: \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times 1}$$

$$\text{dann } f'(x)_i = \partial_i f_i(x)$$

Beispiel:  $f(x) = e^{2x_1} \cos(x_1 x_2)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$       Zerlegungsschritt:  $f$  auf  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = \frac{d}{dt} f(x+te_1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{2(x_1+t)} \cos((x_1+t)x_2) \Big|_{t=0} = 2e^{2(x_1+t)} \cos((x_1+t)x_2) - e^{2(x_1+t)} x_2 \sin((x_1+t)x_2) \Big|_{t=0}$$

$$= 2e^{2x_1} - e^{2x_1} x_2 \sin(x_1 x_2)$$

alternativ  $= \frac{d}{dt} e^{2t} \cos(tx_2) \Big|_{t=x_1}$

alternativ  $= \frac{d}{dx_1} e^{2x_1} \cos(x_1 x_2)$

↖ andere Variable wie Konstante behandelt  
↖ abgeleitete Ableitung nach  $x_1$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x) = \frac{d}{dx_2} e^{2x_1} \cos(x_1 x_2) = -e^{2x_1} x_1 \sin(x_1 x_2)$$

und  $f'(x) = (e^{2x_1} (2 - x_2 \sin(x_1 x_2)) - e^{2x_1} x_1 \sin(x_1 x_2)) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$



$$\text{Basisvekt. : } \underbrace{f(r, \varphi)}_{\in \mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Polarkoordinaten - Abbildung

belandende  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^{2 \times 1} \dots$

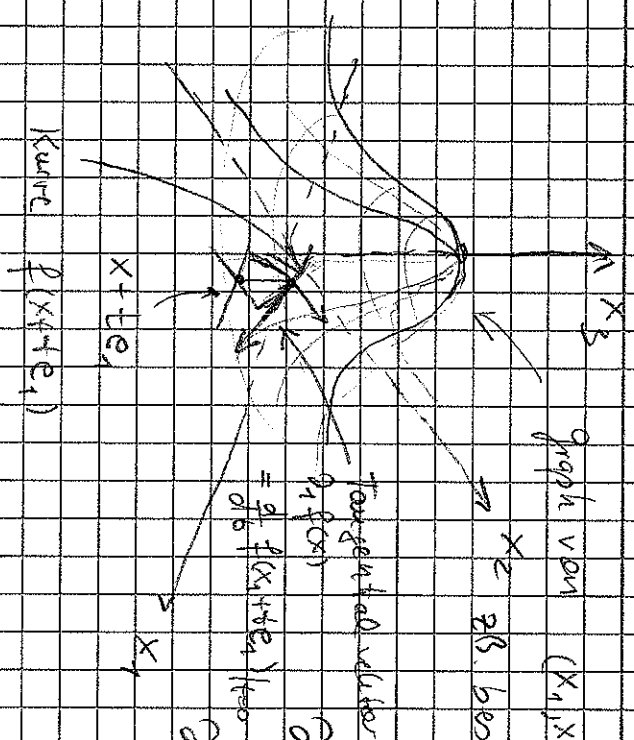
$$\frac{\partial}{\partial r} f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r \cos \varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} r \cos \varphi \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{Jacobi matrix}$$

$$\text{aber Ableitung : } f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

durch Matrixprodukt zwischen  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  und  $\mathbb{R}^2$  erhält def.



Graph von  $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$  (i.i.d. Standardnormalverteilung)

$x \in \mathbb{R}^2$  beschrieben durch  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2))$

$$\partial_1 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\partial_2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -x_2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -x_2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

oder Ableitung:  $f'(x)(h) = (f'(x)(h_1), f'(x)(h_2), f'(x)(h_3))$

Bem:  $T_x(h) = f(x) + f'(x)(h) = f(x) + h_1 f'(x)(e_1) + h_2 f'(x)(e_2)$

$$= f(x) + h_1 \partial_1 f(x) + h_2 \partial_2 f(x) \quad \text{affine Ebene durch } f(x)$$

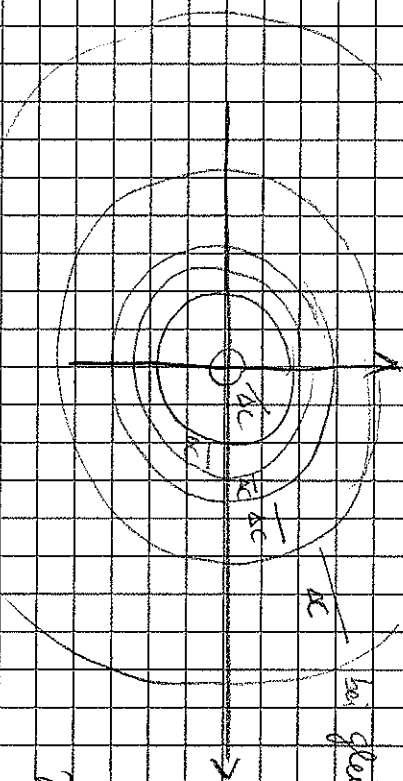
Tangentialebene an  $f(x)$   $\leftarrow$  aufspannt von Tangentialvektoren  $\partial_i f(x)$

andere Darstellung durch Höhenlinien (Niveaumengen)

↙ wie in MatLab  
 $\varphi(x_1, x_2) := \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$

betrachte  $\{x \in \mathbb{R}^{2d} \mid \varphi(x) = c\} =: N_c$

CSR



bei gleichem Niveaumaisstand  $c=c$

bedeuten • dicke Höhenlinien starke Änderung

• große Abstände schwache Änderung

$$\begin{aligned} \partial_{\xi} \varphi(x) &= \varphi'(x) \xi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi(x) \\ \partial_2 \varphi(x) \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi(x) \\ \partial_2 \varphi(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &\in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mathbb{R}^{2 \times 1} \end{aligned}$$

↙ Cauchy Schwarz  $\left| \partial_{\xi} \varphi(x) \right| \leq \|\nabla \varphi(x)\|_2 \|\xi\|_2$

$\left| \partial_{\xi} \varphi(x) \right| \leq \|\nabla \varphi(x)\|_2 \|\xi\|_2 = \|\nabla \varphi(x)\|_2$   
 "Nabla  $\varphi$ "

für Änderung  $\partial_{\xi} \varphi(x)$  mit  $\|\xi\|_2 = 1$  gilt  $\|\partial_{\xi} \varphi(x)\|_2 \leq \|\nabla \varphi(x)\|_2$

also maximal für  $\xi = \nabla \varphi(x)$  "maximaler Anstieg"

$\|\nabla \varphi(x)\|_2$

subproblem "maximaler Anstieg" für  $\xi = -\frac{\nabla \varphi(x)}{\|\nabla \varphi(x)\|_2}$

keine Änderung für  $\xi \perp \nabla \varphi(x)$

Ist  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N_\varepsilon$  eine glatte Kurve in der Niveau-menge mit  $\gamma(0) = x$

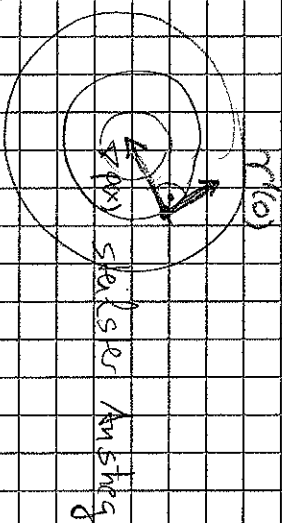
dann ist  $\varphi(\gamma(t)) = c$  für  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  also  $0 = \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) = \varphi'(\gamma(0)) \gamma'(0)$

$$= \nabla \varphi(x) \cdot \gamma'(0)$$

d.h.  $\nabla \varphi(x)$  steht senkrecht auf der Niveau-menge  $N_{\varphi(x)}$

Die stärkste Änderung von  $\varphi$  ist senkrecht zu

den Niveau-mengen



Definition 8.6 Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar in  $x$ . Dann wird die

Matrix  $(\partial_j f(x))_{j=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  Jacobimatrix von  $f$  an der Stelle  $x$  bezeichnet (Symbol  $f'(x)$ )

$$j = 1, \dots, n$$

$$n = 1, \dots, n$$

Im Fall  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  wird  $(f'(x))^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  Gradient von  $f$  an der Stelle  $x$  genannt

Symbol  $\nabla f(x)$

Tangentenvektor  
an Niveau-menge