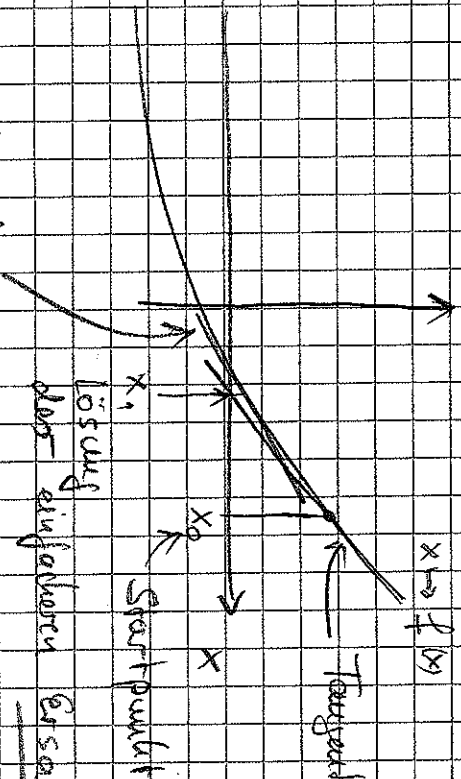


Kapitel 11: Lösen von Gleichungen II

Ziel: Löse Gleichung $f(x) = 0$ mit $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ affin

Jede aus 1D



Wiederholung der Prozedur liefert bessere Näherung

$$\text{Lösung der aufgetrennten Ersatzgleichung} - \underline{T_{x_0}(x) = 0}$$

$$T_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

approximiert f also $f(x) \approx T_{x_0}(x)$

in der Nähe von x_0

An beliebig Dimensionen:

Newton Algorithmus

- wähle Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$
- löse lineare Ersatzgleichung $f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$
- nenne Ergebnis x_{k+1} und iteriere

ausgerechnet.

$$f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k)$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k) =: \phi(x_k)$$

beachte

Newton Algorithmus ist Fixpunktiteration!

$$\text{an einem FP gelte: } x = \phi(x) = x - f'(x)^{-1} f(x) \Leftrightarrow f'(x)^{-1} f(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{f(x) = 0}$$

Wobei: Annahme der Existenz eines Fixpunkts liefert zum Konvergenzbeis der FP Iteration

zu zeigen: ϕ ist kontrahierende Selbstabbildung

zu betrachten:

Lemma 11. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^1(X, \mathbb{R}^m)$. Ist $f'(x)$ invertierbar für ein $\bar{x} \in X$

Dann gibt es ein $r > 0$, so dass $x \mapsto f'(x)^{-1}$ eine stetige Abbildung auf $B_r(\bar{x})$ ist.

Ist $f \in C^2(X, \mathbb{R}^m)$ dann ist die Abbildung sogar stetig differenzierbar.

Bemerkung) $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Polynom in Matrixelementen (Laplace-Formel)

und damit stetig

also $D(x) = |\det f'(x)|$ stetig auf X und $D(\bar{x}) > 0$ da $f'(\bar{x})$ invertierbar

daher gibt es $\tau > 0$ mit $D(B_{\tau}(\bar{x})) \subset B_{\frac{D(\bar{x})}{2}}(D(\bar{x})) = (D(\bar{x})/2, 3/2 D(\bar{x}))$

$\Rightarrow D(x) \neq 0$ auf $B_{\tau}(\bar{x})$ d.h. $f'(x)$ invertierbar auf $B_{\tau}(\bar{x})$

Nun gilt für A_{ij}^{-1} um Stetigkeit bzw. Regeln (Cramersche Regel)

$$e_j = A A^{-1} e_j = \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{kj} A_{k\cdot} e_k \quad \text{A}_{k\cdot} \text{ k-te Spalte von } A$$

das $\Rightarrow$ wenn zwei Spalten gleich

$$\det(a_1 \dots e_j \dots a_n) = \sum_{k=1}^n A_{kj}^{-1} \det(a_1 \dots a_k \dots a_n) = A_{ij}^{-1} \det(a_1 \dots a_i \dots a_n)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
i-te Spalte *det linear in i-ter Spalte* *i-te Spalte*

$$\text{also } f(x)^{-1} = \frac{\det(f'(x))}{\det(f'(x))} e_j = \frac{1}{\det(f'(x))} a_j$$

bzw. stetig diffbar
wenn $f \in C^2(X)$ ist stetig als Produkt / Quotient / Grenzwert
steigend $\Leftarrow$ at

Stetigkeit

alternativ an Basis ohne Definiertsein auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^m$ (vollstetig sein auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^m$)

(Satz 2) Sei $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ Operatornorm bzw. $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^m$

Da $f \in C^1$ ist $F(x) = f(x) f'(x)^{-1}$ stetig; $F \in C^0(X, \mathbb{R}^{m \times n})$

(Vollstetigkeit von $x \mapsto f(x)$ mit $A \mapsto A f'(x)^{-1}$)
 $\nwarrow$ stetig
 $\nwarrow$ stetig also stetig

Bu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existiert $\tau > 0$ mit $\|F(x) - F(x')\| < \frac{1}{2}$ wenn $x, x' \in B_\tau(x)$

$\nwarrow$ $F(x)$ ist Einheitsmatrix

damit ist gew. Matrixreihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ (Satz von Neumann Reihe) mit $A = I - F(x)$

$$\sum_{k=0}^n \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^n \|A\|^k \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 4$$

und $(\mathbb{R}^{n \times n}, \|\cdot\|)$ ist vollständig

$$\text{wegen } A \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - I$$

$$\text{ist } (I - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I$$

$$\text{also } \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$$

Es gilt also die
 geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} = (1-a)^{-1}$$

$$\|AB\| = \max_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \max_{\|x\|=1} \|A\| \|Bx\| = \|A\| \|B\|$$

Da aus: $I - A = I - (I - F(x)) = F(x)$ ist invertierbar mit $F(x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - F(x))^k$

also $f'(x) f'(x)^{-1} f(x)^{-1} = I$ d.h. $f'(x)$ ist invertierbar mit $f'(x)^{-1} = f(x)^{-1} f'(x)$

wird $\|f'(x)^{-1} - f'(\bar{x})^{-1}\| = \|f'(x)^{-1} (f(x)^{-1} - I)\|$

$$= \|f'(x)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (I - f(x)^{-1})^k\|$$

$$= \|f'(x)^{-1} (I - f(x)^{-1}) f(x)^{-1}\|$$

$$= \|f'(x)^{-1} (f'(\bar{x}) - f'(x)) f'(x)^{-1} f(x)^{-1}\|$$

$$\leq \|f(x)^{-1}\| \|f'(\bar{x})^{-1}\|^2 \|f'(x) - f'(\bar{x})\|$$

wird $\|f(x)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|I - f(x)\|^k \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

zu $\exists \delta > 0 \forall 0 < \delta < \eta$ $\|f'(x) - f'(\bar{x})\| \leq \frac{\epsilon}{2 \|f'(\bar{x})^{-1}\|^2}$ falls $\|x - \bar{x}\| < \delta$

also $f'(x)$ stetig in $\bar{x}$. Wiederholung des Arguments für jeden Punkt $\bar{x} \in B_r(\bar{x})$

mit Stetigkeit in $B_r(\bar{x})$ $\square$

Wenn $G(x) = (f'(x))^{-1}$ stetig ist, dann

$$\phi(x) = x - (f'(x))^{-1} f(x) = x - G(x) f(x) =: \psi(x)$$

↖
wenn x nahe $\bar{x}$

Lemma 11.2: Sei $X \subset \mathbb{R}^{n_1}$ offen, $f \in C^1(X, \mathbb{R}^{n_2})$ und $\underline{f(x) = 0}$ mit $f'(\bar{x})$ invertierbar.

Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\forall: \underline{B_\delta(\bar{x})} \rightarrow \underline{B_\delta(\bar{x})}$ einen
 $\|\cdot\|_\infty$ -Kontraktionsfaktor $\leq \kappa$ hat.

Beweis: $\psi'(x) = I - G(x) f'(x) = G(x) (f'(\bar{x}) - f'(x))$ Ziel: zeige " ψ' klein"

Sei $\|\cdot\|$ Normierung zu $\|\cdot\|_\infty$ generell gilt für Operatornormen...

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\| \|Bx\| = \|A\| \|B\|$$

↖
Vektornorm

$$\text{also } \|\psi'(x)\| \leq \|G(x)\| \|f'(\bar{x}) - f'(x)\|$$

Da $x \mapsto f'(x)$ stetig gibt es zu $\epsilon = \frac{\delta}{\|G(\bar{x})\|}$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|f'(x) - f'(\bar{x})\| < \epsilon \quad \text{falls } \|x - \bar{x}\| \leq \delta$$

also $\| \psi'(x) \| \leq K$ für $x \in \underline{B}_\delta(x)$

daher $\| \psi(x) - \psi(y) \|_\infty = \left\| \int_0^1 \psi(x+t(y-x))(y-x) dt \right\|_\infty \leq \int_0^1 \| \psi(x+t(y-x))(y-x) \|_\infty dt$

Satz von Taylor
mit Integralrestglied

Integral eines $\mathbb{R}^{n \times 1}$ -wertigen Funktionen
ist komponentenweise erlaubt

$$\leq \int_0^1 \| \psi'(x+t(y-x)) \|_\infty \| y-x \|_\infty dt \leq K \| y-x \|_\infty$$

wenn $x, y \in \underline{B}_\delta(x)$

außerdem: $\| \psi(x) - \bar{x} \|_\infty = \| \psi(x) - \psi(\bar{x}) \|_\infty \leq K \| x - \bar{x} \|_\infty \leq K \delta < \delta$

$\psi(\bar{x}) = \bar{x}$ da $f(\bar{x}) = 0$

$x \in \underline{B}_\delta(x)$ $K < 1$

also $\psi: \underline{B}_\delta(x) \rightarrow \underline{B}_\delta(x)$ ist K -Kontraktion

□

Satz 11.3 Sei $X \subset \mathbb{R}^{n_{\text{vel}}}$ offen, $f \in C^2(X, \mathbb{R}^{n_{\text{acc}}})$, $f(\bar{x}) = 0$ und $f'(\bar{x})$ invertierbar. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass der Newton Algorithmus für jeden Startpunkt $x_0 \in \overline{B_\varepsilon(\bar{x})}$ konvergiert.

Beweis: Nach Lemma 11.1 ist $G(x) = (f'(x))^{-1}$ auf $\overline{B_\varepsilon(\bar{x})}$ stetig differenzierbar.

Damit sind $x \mapsto \|f'(x)\|$ und $x \mapsto \|G(x)\|$ auf $\overline{B_\varepsilon(\bar{x})}$ stetig also beschränkt ... durch C_0

$$\text{d.h. } \|G(y) - G(x)\| \leq \int_0^1 \|G'(x + t(y-x))\| \|y-x\|_{\infty} dt \leq C \|y-x\|_{\infty}$$

$$\text{genauer } \|f(y) - f(x)\|_{\infty} \leq C \|y-x\|_{\infty}$$

$$\text{damit } \| (G(x) - G(\bar{x}))f(x) - (G(y) - G(\bar{x}))f(y) \|_{\infty}$$

0

$$\leq \| (G(x) - G(\bar{x})) (f(x) - f(y)) \|_{\infty} + \| (G(x) - G(y)) (f(y) - f(\bar{x})) \|_{\infty}$$

$$\leq C^2 \|x - \bar{x}\|_{\infty} \|x - y\|_{\infty} + C^2 \|x - y\|_{\infty} \|y - \bar{x}\|_{\infty}$$

$$\leq \frac{1}{4} \|x - y\|_{\infty} \text{ wenn } x, y \in \overline{B_\eta(\bar{x})} \quad \eta \leq \frac{1}{4C^2}$$

Mit $k = 1/4$ ist nach Lemma 11.2 $\gamma: \overline{B_\delta(\bar{x})} \rightarrow \overline{\gamma(B_\delta(\bar{x}))}$ k -kontrahierend

Sei $\varepsilon = \min\{\delta, \eta\}$ und $x, y \in \overline{B_\varepsilon(\bar{x})}$. Dann

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_\infty \leq \|\gamma(x) - \gamma(y)\|_\infty + \|\phi(x) - \gamma(x) - (\phi(y) - \gamma(y))\|_\infty$$

$$\leq k \|x - y\|_\infty + \|(g(x) - g(\bar{x}))f(x) - (g(y) - g(\bar{x}))f(y)\|_\infty \\ \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_\infty$$

$$\text{und } \|\phi(x) - \bar{x}\|_\infty = \|\phi(x) - \phi(\bar{x})\|_\infty \leq \underbrace{\frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|_\infty}_{\leq \varepsilon} < \varepsilon$$

d.h. $\phi: \overline{B_\varepsilon(\bar{x})} \rightarrow \overline{B_\varepsilon(\bar{x})}$ ist kontrahierende Selbstabbildung

und $(\overline{B_\varepsilon(\bar{x})}, d)$ mit $d(x, y) = \|x - y\|_\infty$ ist vollst. met. Raum

(da $\overline{B_\varepsilon(\bar{x})}$ abgeschlossen im vollst. Raum $(\mathbb{R}^{n+1}, d)$)

Banachscher FP-Satz liefert Behauptung $\square$

außerdem ist $\gamma_f(x) := x - G(x)(f(x) - y)$
 nichtlineare Selbstabbildung auf $\overline{B_{\frac{1}{2}}(x)}$ wenn $\|y\|$ klein genug ist. Sei $k = \frac{1}{4}$

$$\|\gamma_f(u) - \gamma_f(v)\|_{\infty} = \|\gamma(u) - \gamma(v)\|_{\infty} \leq \frac{1}{4} \|u - v\|$$

$$\|\gamma_f(x) - x\|_{\infty} = \|\gamma(x) - \gamma(x) + \underbrace{x - x}_{=0}\|_{\infty} = \|G(x)y\|_{\infty} \leq \frac{1}{4} \|x - x\| + \|G(x)\| \|y\|_{\infty} \leq \delta$$

Wobei: $\frac{1}{4} \times$ von γ erfüllt $f(x) = y$ und ist eindeutig falls $\|y\| < \frac{\delta}{4 \|G(x)\|} =: \eta$

da zu jedem $y \in B_{\eta}(0)$ gibt es eindeutiges $x \in B_{\frac{1}{2}}(x)$ mit $f(x) = y$

also $f = f^{-1}(B_{\eta}(0))$ (offen, da f stetig) ist $f|_0 : \emptyset \rightarrow B_{\frac{1}{2}}(0)$ invertierbar

Wobei

außerdem: $f|_0$ ist Lip-stetig: $y_1, y_2 \in B_{\eta}(0)$ suchen $x_1, x_2 = f|_0^{-1}(y_i)$

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|_{\infty} &= \|\gamma_f(x_1) - \gamma_f(x_2)\|_{\infty} \leq \|\gamma_f(x_1) - \gamma_f(x_2)\|_{\infty} + \|\gamma_f(x_1) - \gamma_f(x_2)\|_{\infty} \\ &\leq \frac{1}{4} \|x_1 - x_2\|_{\infty} + \|G(x)\| \|y_1 - y_2\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f|_0^{-1}(y_1) - f|_0^{-1}(y_2)\|_{\infty} \leq \frac{4}{3} \|f(x) - f(y)\|_{\infty}$$

Mit Bem. zu Satz 7.6 ist f^{-1} dann sogar differenzierbar. Insgesamt beweist dies den

Satz 11.4 (über inverse Funktionen)

Sei $X \subset \mathbb{R}^{m+1}$ offen, $g \in C^1(X, \mathbb{R}^{n+1})$, $\bar{x} \in X$ und $g'(\bar{x})$ sei invertierbar.

Dann gibt es eine offene Umgebung O von $\bar{x}$ mit

- 1) $g|_O$ ist injektiv
- 2) $g(O)$ ist offen
- 3) $g|_O^{-1} \in C^1(g(O), \mathbb{R}^{m+1})$
- 4) $(g|_O^{-1})'(y) = g'(\bar{x})^{-1}$ mit $y = g(\bar{x})$, $\bar{x} \in O$

Beweis: Definiere $f(x) = g(x) - g(\bar{x})$ dann $f \in C^1(X)$, $f(\bar{x}) = 0$, $f'(\bar{x}) = g'(\bar{x})$ invertierbar

$\rightarrow$ Obige Argumentation liefert (1) ... (4) für f und damit auch für $g(x) = f(x) + g(\bar{x})$

Bedeutung für's Gleichungslösen: haben wir eine Lösung $\bar{x}$ von $g(x) = y$ und ist

$g'(\bar{x})$ invertierbar, dann können wir auch $g(x) = y$ für y nahe y lösen (mit FP-Iteration) "Schrittweise Invertierbarkeit"

Definition 11.5: Seien (X, τ) , (Y, τ') topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ sei invertierbar. Sind f und f^{-1} stetig, dann wird f Homöomorphismus genannt. Sind U, V endl. dim. VR $\gamma: X \subset U, Y \subset V$ offene und $f: X \rightarrow Y$ invertierbar mit $f \in C^1(X, Y)$ und $f^{-1} \in C^1(Y, X)$ dann wird f Diffeomorphismus genannt.

Satz über Umkehrfunktionen bzgl. Invertierbarkeit:

- 1) $g \in C^1(X, Y)$ invertierbar und $g'(x)$ invertierbar für alle $x \in X$ dann ist g ein Diffeomorphismus.
- 2) $g \in C^1$, $g(x)$ invertierbar dann gibt es offene Umgebungen O von x und $g(O)$ von $g(x)$ so dass $g|_O: O \rightarrow g(O)$ Diffeomorphismus ist.
- 3) $g \in C^1(X)$, $g'(x)$ invertierbar für alle $x \in X$ dann ist g eine offene Abbildung d.h. Bild offener Mengen sind offen.

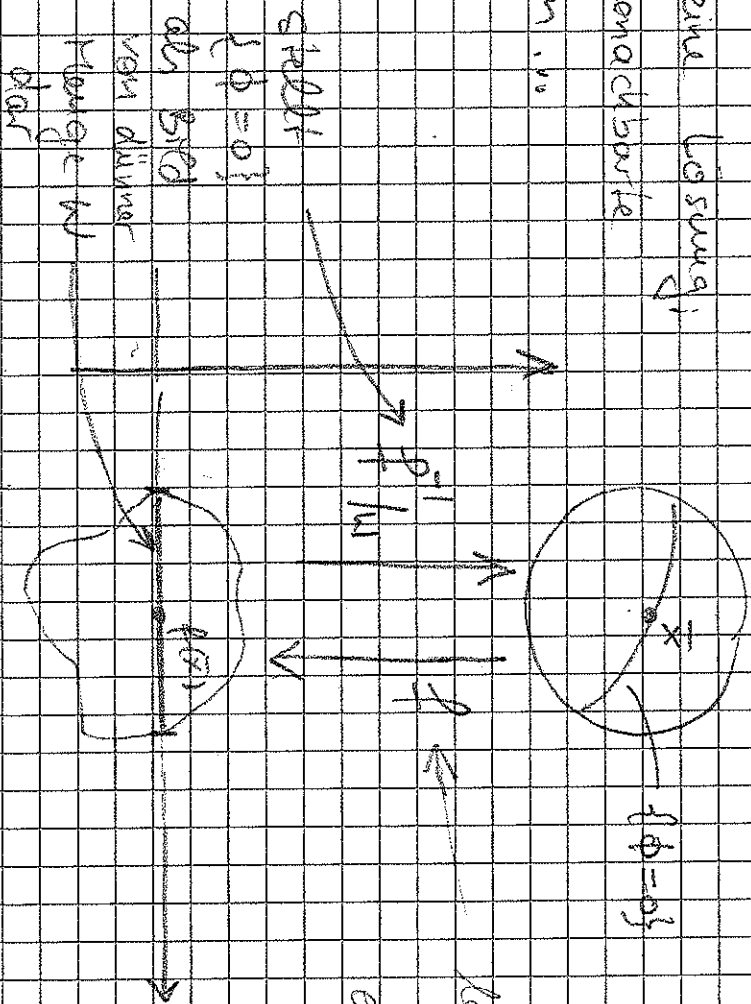
Lokale Auflösungs- und Bestimmungssatz für Gleichungssysteme $\phi(x) = 0$ mit

$$\phi: \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times 1}$$

$$k \leq n$$

(in Gleichungen, in Unbekannten)

Sei $\bar{x}$ eine Lösung,
finde benachbarte
Lösungen „



lange $m = n - k$ Komponenten
unverändert
erste restliche Komponenten durch
 $\phi(x)$

steht
 $\{ \phi = 0 \}$
als Bild
von dünnem
Menge W
dar

Projektionsrichtung beschreiben durch $\pi \in S_n$ und zugehörige Matrizen

$$A_\pi \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

$$A_\pi x = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ \vdots \\ x_{\pi(k)} \end{pmatrix}$$

← abhängig Komponenten

$$U_\pi x = \begin{pmatrix} x_{\pi(k+1)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}$$

← unabhängig Komponenten

$$U_\pi \in \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$$

$$\text{z.B. } \pi = (2 \ 5 \ 1 \ 3 \ 4)$$

$$A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann

$$x = A_\pi^T A_\pi x + U_\pi^T U_\pi x$$

$$A_\pi U_\pi^T = 0$$

$$U_\pi A_\pi^T = 0$$

$$A_\pi A_\pi^T = \text{id}$$

$$U_\pi U_\pi^T = \text{id}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

← in Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann

$$f(x) = A_\pi^T \phi(x) + U_\pi^T U_\pi x$$

Teil der Komponenten ungetrennt

ander Komponenten durch $\phi(x)$ ersetzt

brauche f in Umgebung von x invertierbar

überprüfe Quotientenwert von $f'(x) = A_{\pi}^T \phi'(x) + U_{\pi}^T U_{\pi}$

durch Kettenregelung. Sei $f'(x)h = 0$

$$\text{dann } 0 = U_{\pi}^T f'(x)h = \underbrace{U_{\pi}^T A_{\pi}^T}_{=0} \phi'(x)h + \underbrace{U_{\pi}^T U_{\pi}^T}_{=I} U_{\pi}h \quad \text{also } U_{\pi}h = 0$$

$$\text{damit } h = \underbrace{U_{\pi}^T U_{\pi}}_{=0} h + A_{\pi}^T A_{\pi} h$$

$$\text{und } 0 = A_{\pi}^T f'(x)h = \underbrace{A_{\pi}^T A_{\pi}^T}_{=0} \phi'(x) A_{\pi}^T A_{\pi} h = \underbrace{\phi'(x) A_{\pi}^T}_{=0} A_{\pi} h$$

$$= \underbrace{\left(\partial_{\pi(y)} \phi_{\pi} \right)}_{=0} h$$

damit ist $f'(x)$ genau dann invertierbar, wenn $\phi'(x) A_{\pi}^T$ invertierbar ist

$$(\text{damit dann } A_{\pi} h = 0 \ \& \ U_{\pi} h = 0 \quad \text{also } h = 0)$$

mit Satz über inverse Funktionen gibt es offene Umgebung O von x

mit $f|_O$ Diffeomorphismus; $U_f^{-1}(O) =: W$ offene Menge

$\varphi(w) := f|_O^{-1}(U_f^T w)$ $w \in W$ ist differenzierbar und liefert $\{D\varphi\}$ explizit

obwohl $\Phi(\varphi(w)) = A_f f(f|_O^{-1}(U_f^T w)) = A_f U_f^T w = 0$

damit folgt

$$U_f f(x) = U_f A_f \Phi(x) + \underbrace{U_f U_f^T}_{id} U_f x = U_f x$$

$$x \in T \quad U_f \varphi(w) = U_f f(\varphi(w)) = U_f (f|_O^{-1}(U_f^T w)) = U_f U_f^T w = w$$

$$m \in T \quad \varphi(w) := A_f^{-1} \varphi(w) \quad \varphi \in C^1(W, \mathbb{R}^{k \times n})$$

$$x \in T \quad \varphi(w) = A_f^{-1} \varphi(w) + U_f^T w$$

Abkürzung von φ bezeichnen durch "kurzschließen Ableiten"

$$0 = \Phi(A_f^{-1} \varphi(w) + U_f^T w) \rightsquigarrow 0 = \Phi'(A_f^{-1} \varphi(w) + U_f^T w) (A_f^{-1} \varphi(w) + U_f^T)$$

$$\text{denn: } \phi'(u) = -(\phi'(A_+^T \psi(u) + U_+^T u) A_+^T)^{-1} \phi'(A_+^T \psi(u) + U_+^T u) U_+^T$$

Satz 11.5 (über implizite Funktionen)

Sei $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ offen, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R}^{k \times 1})$ mit $k < n$, $\phi(\bar{x}) = 0$ und für ein $w \in S_n$

sei $(\partial_{w_1} \phi(\bar{x}))_{w_1 \in S_n}$ invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung O von $\bar{x}$

und eine eindeutige bestimmte Abbildung $\psi \in C^1(U_+ O, \mathbb{R}^{k \times 1})$ so dass

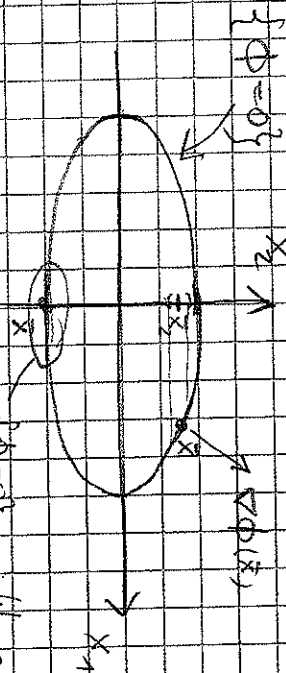
$$\{\phi = 0\} \cap O = \phi(U_+ O) \text{ mit } \phi(u) = A_+^T \psi(u) + U_+^T u \quad (\text{explizite Beschreibung des}$$

implizit definierten Menge $\{\phi = 0\}$).

Beispiel:

$$\phi(x) = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - 1 \quad x \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

$$\phi'(x) = \left(\frac{2x_1}{a^2} \quad \frac{2x_2}{b^2}\right) \quad \text{falls } x_1 \neq 0 \text{ ist } (\partial_1 \phi(x)) \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \text{ invertierbar}$$



$$\leadsto \phi(\psi(x_2), x_2) = 0 \quad \text{für } x_2 \text{ bin } \bar{x}_2$$

$$\text{wenn } \bar{x}_1 = 0$$

Graph über x_2 Achse darstellbar! ... aber hier $\bar{x}_2 \neq 0$ d.h. $(\partial_2 \phi(x))$ invertierbar

also gibt es ψ mit $\phi(x_1, \psi(x_2)) = 0$