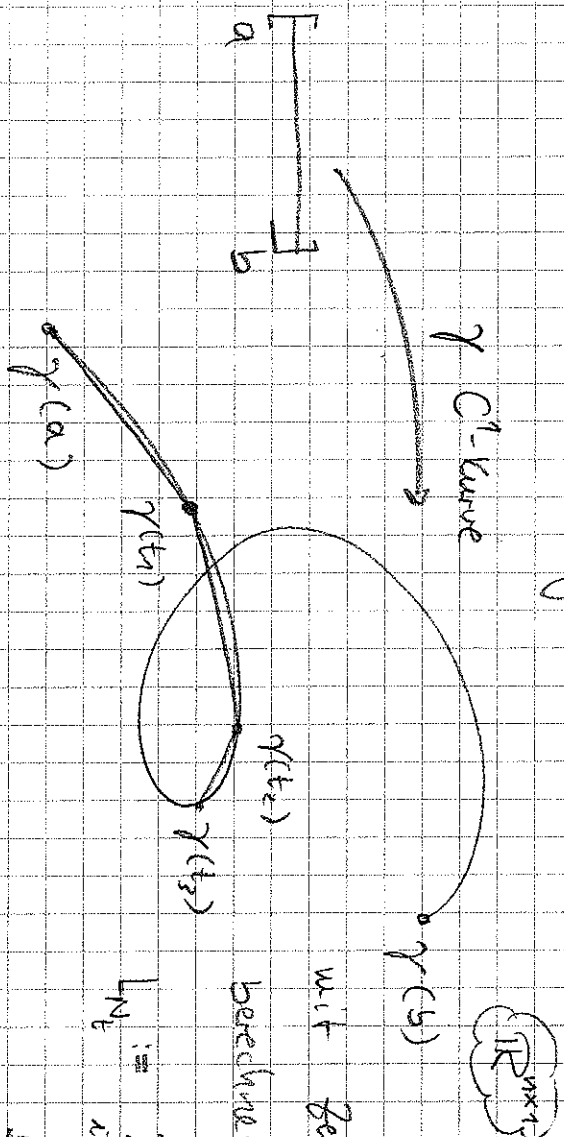


Kapitel 12: Kurvengeometrie



mit Zerlegung t von $[a, b]$ berechnet man approximative Länge

$$L_N := \sum_{i=1}^N \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \|_2$$

annähernde Weg von $[t_{i-1}, t_i]$

$$= \sum_{i=1}^N \underbrace{\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \|_2}_{\text{Geschwindigkeit in } [t_{i-1}, t_i]}$$

$$L_N = \sum_{i=1}^N \| \gamma'(t_i) \|_2 (t_i - t_{i-1})$$

Manuellschwindigkeit in $\mathcal{B}_2$

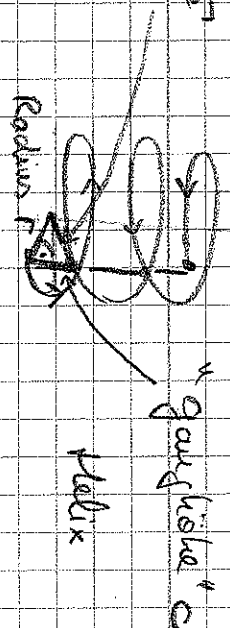
$$\xrightarrow{\Delta(t) \rightarrow 0} \int_a^b \| \gamma'(t) \|_2 dt$$

Definition 12.1 Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$ stetig und $\gamma': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$ stetig auf $[a, b]$ für beliebares Δ Dann nennen wir γ eine C^1 -Kurve parametrisierung

(Symbol $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^{n \times 1})$) wird

$$L(\gamma) = \int_a^b \| \gamma'(t) \|_2 dt \text{ heißt Länge der Kurve zu } \gamma$$

$$\Delta := \sqrt{r^2 + \left(\frac{c}{3\pi}\right)^2}$$



Beispiel:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ \frac{c}{3\pi} t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 6\pi]$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ \frac{c}{3\pi} \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + \left(\frac{c}{3\pi}\right)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{c}{3\pi}\right)^2} = \Delta$$

konst Geschwindigkeit

$$\text{zurückgelegte Länge bis zur Zeit } t: \mathcal{L}(t) = \int_0^t \|\gamma'(t)\|_2 dt = t \cdot \Delta$$

Wie kann man gleiche Bahn schneller durchlaufen?

z.B. mit $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(2t) \quad t \in [0, 3\pi]$

hat Geschwindigkeit $\tilde{\gamma}'(t) = 2\gamma'(2t) \rightarrow \|\tilde{\gamma}'(t)\|_2 = 2\Delta$

doppelte Geschwindigkeit

Wie kann man erst langsam dann schneller durchlaufen?

z.B. mit $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t^2) \quad t \in [0, \sqrt{6\pi}]$

dann $\tilde{\gamma}'(t) = 2t \gamma'(t^2) \rightarrow \|\tilde{\gamma}'(t)\|_2 = 2t \Delta$

erst langsam (t < sqrt(6pi)) dann schneller (t > sqrt(6pi))

von γ wird φ heißt Parabelwechsel.

$$\gamma'_1(t) = (\gamma \circ \varphi)'(t) = \gamma'(\varphi(t))(\varphi'(t)) = \varphi'(t) \gamma'(\varphi(t))(1) = \varphi'(t) \gamma'(\varphi(t))$$

$|\varphi'(t)| > 1 \rightarrow$ schneller
über γ aus Punkt

Satz 12.3. Sei $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ und sei $\tilde{\gamma}$ eine Überparametrisierung.

$$\text{Dauer gilt } L(\eta) = L(\tilde{\eta})$$

$$\int_c^d \| \gamma'(t) \|_2 dt = \int_c^d | \varphi'(t) | \| \gamma(\varphi(t)) \|_2 dt = \int_c^d f(\varphi(t)) | \varphi'(t) | dt$$

Substitutionsregel $= \int_a^b f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz = \int_a^b f(z) dz$

$V = 1$	$\varphi(c) = a$	$\varphi(d) = b$
$V = 0$	$\varphi(c) = b$	$\varphi(d) = a$

Sei $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. Gibt es φ mit $\varphi'(t) = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(t))\|_2}$?

Dann hätte $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ immer Geschwindigkeit $\|\tilde{\gamma}'(t)\|_2 = \|\varphi'(t)\|_2 \|\gamma'(\varphi(t))\|_2 = 1$
 $\tilde{\gamma}$ würde die Bahn mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen!

Bemerkung: benutze $\gamma'(z) \neq 0$ für alle z — klar

denn an HS: $L(z) = \int_0^z \|\gamma'(t)\|_2 dt$ hat Ableitung $L'(z) = \|\gamma'(z)\|_2$

wenn $\gamma'(z) \neq 0$ für alle z ist L streng monoton wachsend

Ableitung der Umkehrfunktion: $(L^{-1})'(t) = \frac{1}{L'(L^{-1}(t))} = \frac{1}{\|\gamma'(L^{-1}(t))\|_2}$

Definition 12.4: Eine Parametrisierung $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ heißt regulär, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Ist sogar $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ für alle $t \in [a, b]$ so heißt γ

Bogenlängenparametrisierung der Kurve.

Helixbeispiel:

$$\chi(z) = A \cdot z = S$$

$$\rightarrow z = \frac{S}{A}$$

$$= \varphi(s) = \ell^{-1}(s)$$

$$s \in [0, 6\pi A]$$

$$\vec{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{s}{A} \\ r \sin \frac{s}{A} \\ \frac{cs}{2\pi A} \end{pmatrix}$$

ist Bogenlängenparameterisierung der Helix

beachte: bei Bogenlängenparameterisierung r ist

- Defsbereich = $[0, L]$

← Länge der Kurve

- Geschwindigkeit $\|\gamma'(s)\|_2 = 1$ konstant

also: Tangentenvektorwertes $\Theta(s)$ ändert nie seine Richtung

schwache "Krümmung"

weiß

$$\text{also } \|\Theta(s)\|_2$$

$$= \|\gamma''(s)\|_2 = 1$$

ist Maß für die

Krümmung

starke "Krümmung"

weiß

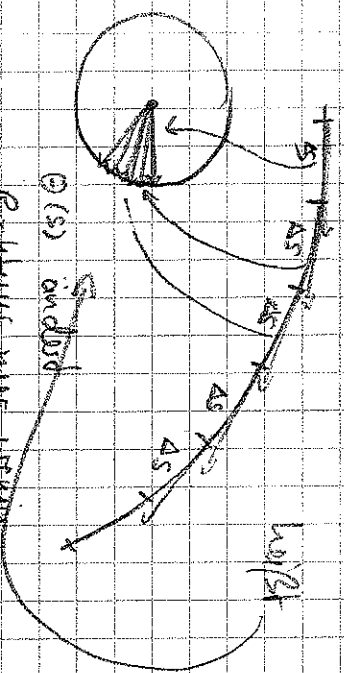
$\Theta(s)$ ändert

Richtung stark

pro Bogenlänge

Entfernung

→ $v(s)$ groß

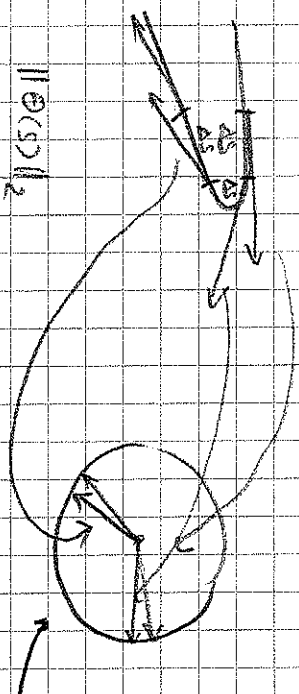


$\Theta(s)$ ändert

Richtung nur wenig

pro Bogenlänge

Entfernung → $v(s)$ klein



wegen $\|\Theta(s)\|_2 = 1$ ist $\Theta^T(s) \Theta(s) = 1$

d.h. $0 = \frac{d}{ds} \Theta(s)^T \Theta(s) = 2 \Theta'(s)^T \Theta(s)$ d.h. $\gamma''(s) \perp \gamma'(s)$

d.h. $\eta(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)}$ ist Einheitsnormalenvektor $\perp$ zur Kurve (definiert wenn $\kappa > 0$)

wegen $\gamma(s) \approx \gamma(s_0) + \underbrace{\gamma'(s_0)}_{\Theta(s_0)} (s-s_0) + \underbrace{\frac{1}{2} \gamma''(s_0)}_{\kappa(s_0) \eta(s_0)} (s-s_0)^2 = \gamma(s_0) + \alpha(s) \Theta(s_0) + \beta(s) \eta(s_0)$

$\in \gamma(s_0) + \text{span}\{\Theta(s_0), \eta(s_0)\}$

d.h. Kurve verläuft in der Nähe von $\gamma(s_0)$ in der durch $\Theta(s_0), \eta(s_0)$ gebildeten Ebene

Da $\gamma(0) (n=3)$ $b(s) := \Theta(s) \times \eta(s)$ Kreuzprodukt "Binormalenvektor" steht $\perp$ auf $\Theta(s), \eta(s)$

$\|b'(s)\|_2$ beschreibt, wie stark sich Normalenvektor ändert

beachte: $b'(s) = \Theta'(s) \times \eta(s) + \Theta(s) \times \eta'(s) = \kappa(s) \eta(s) \times \eta(s) + \Theta(s) \times \eta'(s)$

wegen $\eta(s)^T \eta(s) = 1$ ist $\eta'(s) \perp \eta(s)$ d.h. $\eta'(s) \stackrel{=0}{=} \lambda \Theta(s) + \mu b(s)$

$\leadsto b'(s) = \mu \Theta(s) \times b(s) = -\mu \eta(s)$ d.h. $\tau = -\mu = -\eta(s) \cdot b(s)$ heißt Torsion der Kurve

Für die Helix ist $\Theta(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -r \sin \frac{s}{\Delta} \\ r \cos \frac{s}{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Theta'(s) = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} -r \cos \frac{s}{\Delta} \\ -r \sin \frac{s}{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix}$

daher $\kappa(s) = \|\Theta'(s)\|_2 = \frac{r}{\Delta^2}$

bei $C = 0$

$\kappa(s) = \frac{r}{\Delta^2}$

(Kreisbewegung)

bei $C \rightarrow \infty$

$\kappa(s) \rightarrow 0$

(Geradenbewegung)

und $\eta(s) = \frac{\Theta'(s)}{\kappa(s)} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{\Delta} \\ -\sin \frac{s}{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix}$

sonst $b(s) = \Theta(s) \times \eta(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{C}{2\pi} \sin \frac{s}{\Delta} \\ -\frac{C}{2\pi} \cos \frac{s}{\Delta} \\ r \end{pmatrix}$

$C(s) = -\eta'(s) \cdot b(s) = \frac{C}{2\pi \Delta^2}$

bei $C = 0$

$C(s) = 0$

(Normalenebene bleibt unverändert)

$$\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^{3n})$$

$\gamma(t)$: Position eines Punktes zur Zeit t

$v(t) = \gamma'(t)$: Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t

$a(t) = \gamma''(t)$: Beschleunigung zur Zeit t

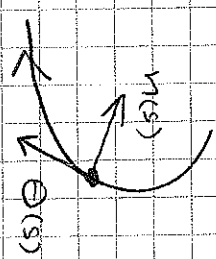
Darstellung von $\gamma''(t)$ im "begleitenden Dreiein" Θ, n, b

Sei $\tilde{\gamma}(s) = (\gamma \circ \varphi)(s)$ Bogenlängenparameterisierung

$$\Theta(s) = \tilde{\gamma}'(s) = \varphi'(s) \gamma'(\varphi(s)) = \frac{\gamma'(\varphi(s))}{\| \gamma'(\varphi(s)) \|_2}$$

$$K(s) n(s) = \Theta'(s) = \varphi''(s) \gamma'(\varphi(s)) + \varphi'(s)^2 \gamma''(\varphi(s))$$

$$\Theta(\varphi(s)) \gamma''(\varphi(s)) = - \frac{\varphi''(s)}{\varphi'(s)^3} \Theta(s) + \frac{K(s)}{\varphi'(s)^2} n(s) = \underbrace{\left(a(\varphi(s)) \cdot \Theta(s) \right)}_{\text{Tangentialkomponente}} \Theta(s) + \frac{\|v(\varphi(s))\|_2^2}{R(s)} n(s)$$



Normalvektor, der Beschleunigung

$R = \frac{1}{K}$ "Krümmungsradius"

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\|v(\varphi(s))\|_2} \quad \varphi''(s) = - \frac{v(\varphi(s))^T v(\varphi(s))}{\|v(\varphi(s))\|_2^3} \varphi'(s) = - \frac{a(\varphi(s)) \cdot v(\varphi(s))}{\|v(\varphi(s))\|_2^4}$$

→ mehr dazu siehe Differentialgeometrie