

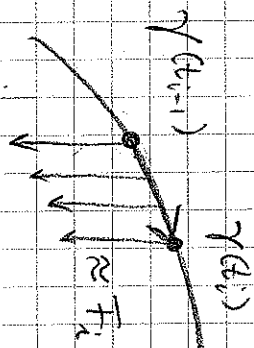
Kapitel 13: Kurvenintegrale von 1-Formen / Vektorfeldern

Stairway
to heaven

γ' : speed
direction

gewichtskraft $\vec{F}(\gamma(t))$
nimmt entlang
des Weges ab

Wieviel Arbeit ist zu leisten?



← geleistete Arbeit

= benötigte Kraft in Wegrichtung

× Weglänge
Skalarprodukt

benötigte Kraft

Weglänge

Wähle $\vec{F}_i = \vec{F}(\gamma(\xi_i))$

$$A_N = \sum_{i=1}^{N_T} -\vec{F}_i \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{N_T} -\vec{F}(\gamma(\xi_i)) \cdot \gamma'(\xi_i) (t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{\Delta(t) \rightarrow 0} - \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))^T \gamma'(t) dt$$

ξ_i aus MWS

Definition 13.1: Sei U ein endlich dimensionaler VR und $X \in U$. Eine stetige

Funktion $\omega: X \rightarrow \mathcal{L}(U, \mathbb{R})$ heißt 1-Form auf X . Statt $\omega(x)(h)$ schreibt man auch $\omega(x, h)$

Im Spezialfall $U = \mathbb{R}^{n \times 1}$ identifiziert man $\mathcal{L}(U, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{1 \times n}$ durch

$$\omega(x, h) := \omega(x)_i h_i \quad \text{für } x \in X, h \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$\uparrow$
Matr. x Produkt

1-Formen auf X bilden Vektorraum $(\alpha\omega + \beta\eta)(x, h) := \alpha\omega(x, h) + \beta\eta(x, h)$

ist $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ und ω 1-Form. Dann definiert $(f\omega)(x, h) := f(x)\omega(x, h)$ 1-Form

Jeden Vektorfeld $F: \mathbb{R}^{n \times 1} \supset X \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$ heißt eine 1-Form $\omega: X \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$

durch $\omega(x, h) = F(x)^T h = F(x) \circ h$

Die Ableitung von $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine 1-Form $\omega(x, h) = f'(x)(h)$ auf X

Solche 1-Formen heißen exakt. Exakte 1-Formen ω haben also eine

Stammfunktion: $\omega = f'$ oder: für solche ω ist das partielle DGL System $df = \omega_i dx_i$

Lösbar.

Definition 13.2 Sei $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^{n_1})$ und ω eine 1-Form auf $\gamma([a,b])$

Dann ist $\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t)) dt$ das Kurvenintegral von ω bzgl γ

Wir nehmen $\gamma \in C^0([a,b], \mathbb{R}^{n_1})$ stückweise $C^1([a,b], \mathbb{R}^{n_1})$, falls eine Zerlegung t von $[a,b]$ existiert, so dass $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^1([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R}^{n_1})$ für $i=1, \dots, N_t$

Im anderen Fall ist $\int_{\gamma} \omega := \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\gamma_i} \omega$

Da fehlt doch das "dx" in $\int \omega$ - oder? Definitionsfrage:

Sei dx_i eine "Basis-1-Form" $dx_i = (0 \dots 0 1 0 \dots 0) = e_i^T \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$ (x -wahlh.)

Für die 1-Form ω mit $\omega(x) = (\omega_1(x) \dots \omega_n(x))$ gilt dann

$$\omega(x) = \sum \omega_i(x) e_i^T = \sum \omega_i(x) dx_i \quad \text{also}$$

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma} \underbrace{\omega_i}_{\omega_i \in C^0} dx_i$$

oder mit $dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega dx \quad \leftarrow \text{formales Matrixprodukt}$$

$\omega_i \in C^0, dx_i$ 1-Form
 $\hookrightarrow \omega_i dx_i$ 1-Form

Bei Vektorfeldern F entsprechend

$$\int_{\gamma} F^T = \int_{\gamma} F \circ dx \quad \text{Formeln Skalarprodukt}$$

Anbeischauf: sind die Definitionen!

$$\int_{\gamma} F \circ dx = \sum_i \int_{\gamma} F_i dx_i = \sum_i \int_a^b F_i(\gamma(t)) dx_i(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \sum_i \int_a^b F_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Formalen SP Def 13.2 + C⁰(γ -Form) = 1-Form Def 13.2 + C⁰(γ -Form) = 1-Form Def SP

es sollte gelten: geleistete Arbeit im Kraftfeld F $A = - \int_{\gamma} F \circ dx$

hängt nicht von der Geschwindigkeit ab...

Satz 13.3: Sei $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^m)$ und ω eine 1-Form auf $\gamma([a,b])$

Ist φ ein streng monoton wachsender Parameterwechsel dann $\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega$

Beweis:

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = \int_c^d \omega(\gamma(\varphi(t)), \varphi'(t) \gamma'(\varphi(t))) dt = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Substitutionsregel = $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_{\gamma} \omega$ □

Bem: φ streng monoton fallend: $\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = - \int_{\gamma} \omega$

Erinnerung: HS

$$I) \int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$$

$$\leadsto \int_a^b g' = g(r(b)) - g(r(a)) \quad (I')$$

↙ exakte 1-Form!

$$II) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

↗ jedes $f \in C^0((a,b), \mathbb{R})$
hat eine SF

$$\leadsto \frac{\partial}{\partial x} \int_{\gamma(a,x)} \omega = \omega_x(x) \quad (II')$$

Weg von
a nach x

Nur exakte 1-Formen
haben SF ...

sind nicht alle ω
sind exakt!

große Frage: wann erkennt man exakte ω (also ob für die HS gilt)?

Satz 13.4 (HS Teil I/II)

Sei γ stückweise $C^1([a, b], X)$ mit $X \subset \mathbb{R}^{n \times 1}$ offen, $g \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dann gilt (I')

Ist ω eine exakte 1-Form auf X , $a \in X$ und $\gamma_{a,x}$ für jeden $x \in X$

stückweise $C^1([a, b], X)$ mit $\gamma_{a,x}(a) = a$, $\gamma_{a,x}(b) = x$. Dann gilt (II')

Beweis:

$$g'(g(t), \gamma'(t)) = g'(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \frac{d}{dt} g(\gamma(t))$$

benutze HS auf jedem Kurvenstück:

$$\sum_i \int_{\gamma_i} g' = \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) dt \stackrel{HS}{=} \sum_i g(\gamma(t_i)) - g(\gamma(t_{i-1})) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) \quad (I)$$

Rechenkette

$$\omega \text{ exakt} \Rightarrow \omega = g' \quad \text{für ein } g \in C^1(X, \mathbb{R}) \quad \stackrel{(I')}{\Rightarrow} \int_{\gamma} \omega = g(x) - g(a)$$

$$\text{also partiell diffbar} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\gamma} \omega = \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) = g'(x) e_i = \omega(x, e_i) = \omega_i(x) \quad (II') \quad \square$$

Hauptarbeit: einfache Bedingungen finden, die Exaktheit prüfen oder sogar nachweisen.
 sog. "Integrierbarkeitsbedingungen" IB

zunächst notwendige Bedingungen.

1.1.3.1) Ist $\omega \in C^0(X, \mathbb{R}^{1 \times n})$ exakt dann gilt $\int_{\gamma} \omega = 0$, d.h. für alle geschlossenen $(\gamma(b) = \gamma(a))$ stückweise

$$C^1([a,b], X), \text{ Kurven gilt } \int_{\gamma} \omega = 0.$$

$$\text{Nachweis: } \omega = g' \quad \stackrel{(I')}{\Rightarrow} \int_{\gamma} \omega = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = g(\gamma(a)) - g(\gamma(a)) = 0$$

Nachteil: Sehr viel Überprüfungen benötigt (alle geschl. Kurven)

Vorteil: ist doch hinreichend (Satz 13.5)

1.1.3.2) Ist $\omega \in C^1(X, \mathbb{R}^{1 \times m})$ exakt, dann gilt $\partial_i \omega_j = \partial_j \omega_i$

Nachweis: $\omega = g'$ damit $\partial_i g = \omega_i \in C^1$ also $g \in C^2$ also g zweimal diffbar
 also $\partial_i \omega_j = \partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g = \partial_j \omega_i$
 (Satz von Schwarz)

Vorteil: sehr einfach zu überprüfen

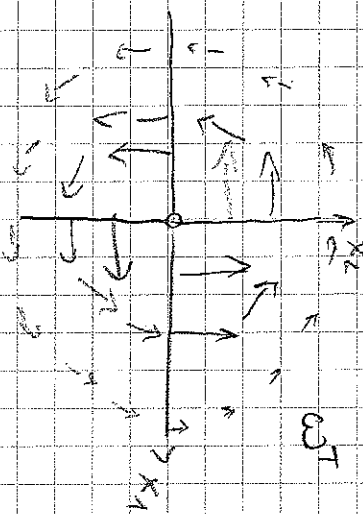
Nachteil: hinreichend nur unter geometrischen Voraussetzungen an X (Satz 13.2)

Beispiel: $X = \mathbb{R}^{2 \times 1} \setminus \{0\}$ $\omega(x) = \frac{1}{\|x\|_2^2} (-x_2 \ x_1)$

erfüllt 1.1.3.2 ... nachrechnen!

aber nicht 1.1.3.1 z.B. mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$t \in [0, 2\pi]$



$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} -\frac{x_2^2}{\|x\|_2^2} dx_1 + \int_0^{2\pi} \frac{x_1^2}{\|x\|_2^2} dx_2 = \int_0^{2\pi} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = \int_0^{2\pi} \cos t \cos t - \sin t (\sin t) dt$$

$\|x\|_2 = 1$

$= 2\pi \neq 0 \rightarrow$ nicht exakt

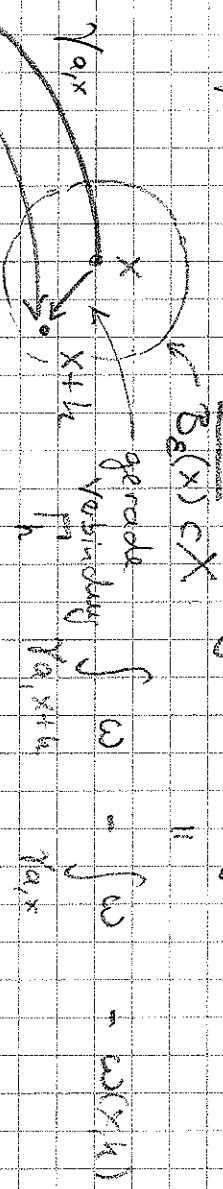
Satz 13.5: Sei $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und sei je zwei Punkten x, y existiere eine stückweise C^1 Verbindung γ_{xy} mit Werten in X .
 Erfüllt die 1-Form ω NIBT, dann ist ω exakt

Beweisidee: Stauraumfunktion g von ω nun konstruiert werden! Nach HS II'

bleibt nur: $g(x) := \int \omega$

$\gamma_{a,x}$
 ↗erster Punkt

überprüfe Differenzierbarkeit: $g(x+h) - g(x) - \omega(x, h) \stackrel{!}{=} \|h\| \tau_x(h)$
 ↖wussten Ableitung kann da h



bewe geschlossenen stückweise- $C^1([0,3], X)$ Parametrisierung $\tilde{\gamma}$ mit

$\tilde{\gamma}: \gamma_{a,x+h}$ dann $\int_h$ dann $\gamma_{a,x}$ rückwärts durch α in lineare Parametrisierung $\tilde{\gamma}$ mit
 $[0,1] \rightarrow \text{Defgebi}$ $[0,2] \rightarrow \text{Defgebi}$ $[0,3] \rightarrow \text{Defgebi}$ str. von Fallstudie
 $\gamma_{a,x+h}$ $\gamma_{a,x}$

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0, x+h} \omega + \int_{\gamma_h} \omega - \int_{\gamma_0, x} \omega$$

$\xrightarrow{NBS1}$

$\int_{\gamma_0, x} \omega$ wenn fallend

Def: Kurvenintegral
 + Parameterwechsel ändern Wert nicht

Bsp also

$$\frac{1}{\|h\|} \left(\int_{\gamma_h} \omega - \omega(x, h) \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

mit $\gamma'_h(t) = x + th, \quad t \in [0, 1]$

$\gamma'_h(t) = h$

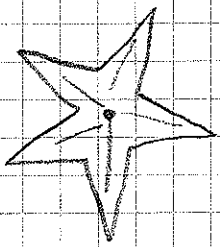
$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_h} \omega - \omega(x, h) &= \int_0^1 \omega(x+th, h) dt - \int_0^1 \omega(x, h) dt \\
 &= \|h\|_2 \int_0^1 \left(\omega(x+th, \frac{h}{\|h\|_2}) - \omega(x, \frac{h}{\|h\|_2}) \right) dt
 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ wegen Stetigkeit von $\omega(x)$

(14)

Definition 13.6 Sei U ein VR. Eine Menge $S \subset U$ heißt sternförmig, wenn ein $\bar{x} \in S$ (Sternpunkt) existiert, so dass zu jedem $x \in S$ die Strecke $\{ \bar{x} + t(x - \bar{x}) \mid t \in [0, 1] \}$ ganz in S liegt.

Beispiel: S konvex $\rightarrow S$ sternförmig (mit jedem Punkt als Sternpunkt)



nicht konvex oder sternförmig

$\mathbb{R}^{2 \times 1}, \{0\}$

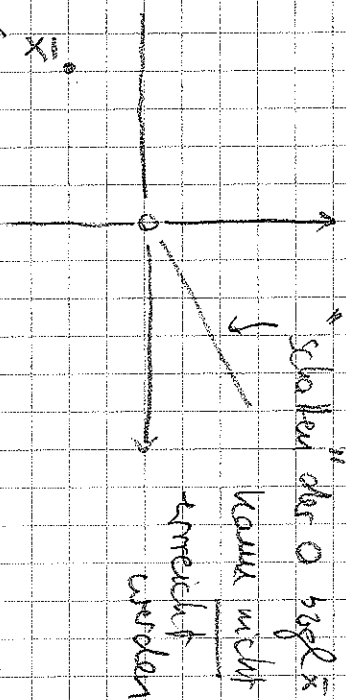
nicht sternförmig

↳ "Lemma von Poincaré"

Satz 13.7 Sei $X \subset \mathbb{R}^{n \times 1}$ offen und sternförmig

und $\omega \in C^1(X, \mathbb{R}^{1 \times n})$ erfülle $\text{div } \omega = 0$. Dann ist $\int \omega$ exakt

(allgemeiner: erfüllt Zusammenhang)



Beispiel: wieder Stawen funktion definieren ... $\gamma_{a,x}(t) := a + t(x-a) \quad t \in [0,1]$

← Stützpunkt von X

$$g(x) := \int_{\gamma_{a,x}} \omega = \int_0^1 \omega(a+t(x-a))(x-a) dt$$

$f(t,x)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 f(t,x) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(t,x) dt$$

später: Ableitung von Parameterabhängigen Integralen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \omega(a+t(x-a))(x-a) = t \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \omega(a+t(x-a))(x-a) + \omega_i(a+t(x-a))$$

← Nachrechnen im Komponentenweise

$$(n+1) \omega_i(a+t(x-a)) = t \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \omega_j(a+t(x-a))(x-a)_j + \omega_i(a+t(x-a))$$

$$\text{Kettenregel rückwärts} = t \frac{d}{dt} \omega_i(a+t(x-a)) + \omega_i(a+t(x-a))$$

$$= \frac{d}{dt} t \omega_i(a+t(x-a))$$

$$\text{also } \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) = \left[t \omega_i(a+t(x-a)) \right]_0^1 = \omega_i(x)$$

□

Speziell in der Physik:

$n=3$, $\omega = \mathbb{F}^1$ Vektorfeld

NI32: $\partial_1 \mathbb{F}_2 = \partial_2 \mathbb{F}_1$ + Gebiet sternförmig

$$\partial_1 \mathbb{F}_3 = \partial_3 \mathbb{F}_1$$

$$\partial_2 \mathbb{F}_3 = \partial_3 \mathbb{F}_2$$

$$\mathbb{F}^1 = g' \quad d.h. \quad \boxed{\mathbb{F} = \nabla g}$$

Definiert man für C^1 -Vektorfelder:

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} := \nabla \times \mathbb{F} :=$$

$$\begin{pmatrix} \partial_2 \mathbb{F}_3 - \partial_3 \mathbb{F}_2 \\ \partial_3 \mathbb{F}_1 - \partial_1 \mathbb{F}_3 \\ \partial_1 \mathbb{F}_2 - \partial_2 \mathbb{F}_1 \end{pmatrix}$$

dann gilt dies:

$\mathbb{F} \in C^1(X, \mathbb{R}^{3 \times 1})$, X sternförmig, $\operatorname{rot} \mathbb{F} = 0$

dann gibt es $\phi \in C^2(X, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{F} = -\nabla \phi$

"konservatives Kraftfeld" zugeh. "Potential"

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = 0$$

dann

$\oint_{\gamma} \mathbb{F} = 0$ bedeutet: keine Energieumwandlung durch Kreisprozesse

viel 1-Formalstil in der Thermodynamik