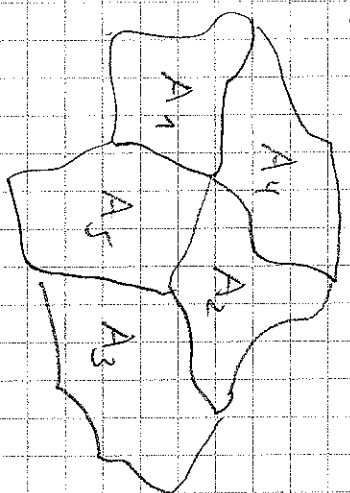


Kapitel 14 Mehrdimensionale Integration - Überblick

Integration von Treppenfunktionen

Region $R = \bigcup_{i=1}^n A_i$ Länder



Landkarte

Bevölkerungsdichte ρ_i in A_i ... als Funktion $\rho(x) = \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$
 Bevölkerungsein R : $\sum_{i=1}^n \rho_i \lambda(A_i)$ Fläche von A_i

Prokopfeinkommen e_i in A_i ... $e(x) = \sum_{i=1}^n e_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$

Gesamteinkommen in R : $\sum_{i=1}^n e_i \lambda(A_i)$ Einkommensanteil von A_i

Anteil w_i der Gesamtanbaufläche an der gesamten Ackerfläche in A_i ... $w(x) = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$

Wasserspeicherfläche in R : $\sum_{i=1}^n w_i \lambda(A_i)$ Ackerfläche in A_i

Gemeinsamkeit:

Treppenfunktion

$$S(x) = \sum_{i=1}^n s_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

Stufenwert

wird "integriert" durch:

$$\sum_{i=1}^n s_i \mu(A_i)$$

Bemerkung ("Höfde")
der Menge A_i

beachte: für die gleiche Menge A_i
kann es ganz unterschiedliche Höfde geben

Idee zur Integration allgemeiner Funktionen f

- 1) approximiere f durch Treppenfunktionen S_n (nos malweise mit immer kleineren Stufenmengen)
- 2) Integralwert ist Grenzwert der Summen $\sum_{i=1}^n s_i \mu(A_i)$ (falls existiert)

Symbol:

$$\int f(x) \mu(dx)$$

alternativ (unweniger intuitiv)

$$\int f(x) d\mu(x)$$

"Summe"

Höfde des "in für integralen Menge dx "

beim Punkt

dann gilt jedem Fall

$$\int \sum_{i=1}^n s_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \mu(dx) = \sum_{i=1}^n s_i \mu(A_i)$$

Wir werden sehen ...

1) Es existiert ein

Längenmaß

λ auf $\mathbb{R}$

$$\lambda([a, b]) = (b - a)^+$$

$$x^+ = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Flächenmaß

λ^2 auf $\mathbb{R}^2$

$$\lambda^2([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = \lambda([a_1, b_1]) \lambda([a_2, b_2])$$

Volumenmaß

λ^3 auf $\mathbb{R}^3$

$$\lambda^3([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]) = \lambda^2([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) \lambda([a_3, b_3])$$

n-dim Volumenmaß

λ^n auf $\mathbb{R}^n$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

entsprechend

sog

n-dim Lebesgue Maß

mit Verschiebungsinvarianz $\lambda^n(A + c) = \lambda^n(A)$

$c \in \mathbb{R}^n$

2) "old = new"

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\mathbb{1}_{[a, b]}$ -f. Die waren integrierbar auf $[a, b]$, dann ist $\mathbb{1}_{[a, b]}$ -f. Lebesgue integrierbar

und

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \lambda(dx) = \int_{[a, b]} \mathbb{1}_{[a, b]}(x) f(x) \lambda(dx) = \int_a^b f(x) dx$$

2b) "Linearität und Monotonie"

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) \lambda''(dx) = \alpha \int f(x) \lambda''(dx) + \beta \int g(x) \lambda''(dx)$$

$$f \leq g \Rightarrow \int f(x) \lambda''(dx) \leq \int g(x) \lambda''(dx)$$

3) " mehr D - Integration = mehrmals 1D - Integration "

Sei $\pi \in S_n$, $1 \leq k \leq n$ $x = A_\pi^T A_\pi x + U_\pi^T U_\pi x$

$$\int_{\mathbb{R}^{nx_1}} f(x) \lambda^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^{nx_1}} f(A_\pi^T A_\pi x + U_\pi^T U_\pi x) \lambda^n(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{k \times x_1}} \int_{\mathbb{R}^{(n-k) \times x_1}} f(A_\pi^T a + U_\pi^T u) \lambda^{n-k}(du) \lambda^k(da)$$

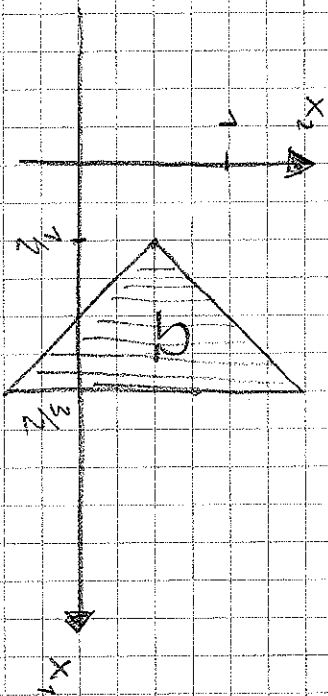
$$= \int_{\mathbb{R}^{(n-k) \times x_1}} \int_{\mathbb{R}^{k \times x_1}} f(A_\pi^T a + U_\pi^T u) \lambda^k(da) \lambda^{n-k}(du)$$

Satz von Fubini

eigentlich unnötig

da nur auslesen π, k benötigt

Beispiel:



$$f(x) = x_1 x_2$$

$$\int_{\Omega} f(x) \lambda^2(dx) := \int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \mathbb{1}_{\Omega}(x) f(x) \lambda^2(dx) \stackrel{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\Omega}(x_1, x_2) x_1 x_2 \lambda^1(dx_2) \lambda^1(dx_1)$$

$$= 0 \text{ für } x_1 \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$= \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]}(x_1) \text{ für } x_1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{insgesamt} = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]}(x_1) \mathbb{1}_{[1-x_1, x_1]}(x_2)$$

$$\stackrel{(2)}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{1-x_1}^{x_1} x_1 x_2 dx_2 dx_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x_1 \left[\frac{1}{2} x_2^2 \right]_{1-x_1}^{x_1} dx_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} x_1 (2x_1 - 1) dx_1 = \left[\frac{1}{6} x_1^3 - \frac{1}{4} x_1^2 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{7}{12}$$

emb geschneid: 3D $\rightarrow$ 1D & 2D $\rightarrow$ 1D & 1D & 1D
 4D $\rightarrow$ 2D & 2D $\rightarrow$ 1D & 1D & 1D & 1D etc.

motiviert alternative Notation für Lebesgue Integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) \lambda^3(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 =: \int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx$$

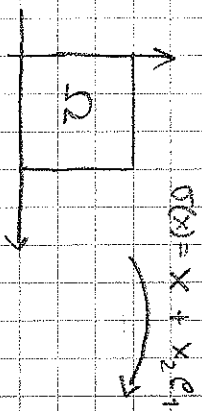
" = dx "

Beispiel: Scherungen

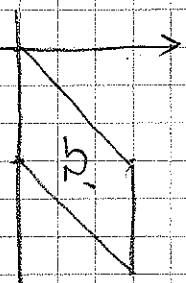
$$\sigma(x) = x + \alpha x_i e_j, \quad i \neq j$$

$$\sigma^{-1}(y) = y - \alpha y_i e_j$$

ändern das Volumen nicht



$$\sigma(x) = x + x_2 e_1$$



$$\pi = (i, 2, 3, \dots, 1, k+1, \dots, n), \quad k=1 \leadsto A_\pi^T = e_i$$

Nachweis:

$$\lambda^n(\Omega') = \int_{\Omega'} \mathbb{1}_{\Omega'}(x) \lambda^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^{n \times 1}} \int_{\mathbb{R}^{(n-1) \times 1}} \mathbb{1}_{\Omega'}(ae_i + u_\pi^T u) \lambda^n(du) \lambda^1(da)$$

Trennfunktion
mit einer Stufe

$$ae_i + u_\pi^T u \in \Omega' = \sigma(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \sigma^{-1}(ae_i + u_\pi^T u) \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow ae_i + u_\pi^T u - \alpha ae_j \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow u_\pi^T u \in \alpha ae_j - ae_i + \Omega$$

$$\Leftrightarrow u = u_\pi u_\pi^T u \in \alpha ae_j + u_\pi \Omega$$

$$0 = A_\pi u_\pi^T u \in -\alpha + A_\pi \Omega$$

translationsinvariant

A_π rückwärt

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_\pi \Omega}(a) \lambda^{n-1}(u_\pi \Omega + \alpha ae_j) \lambda^1(da) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_\pi \Omega}(a) \lambda^{n-1}(u_\pi \Omega) \lambda^1(da) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\Omega}(x) \lambda^n(dx) = \lambda^n(\Omega)$$

Rechenregeln mehrdim Integration (vorausgesetzt, alle auftretenden Fkt sind integrierbar)

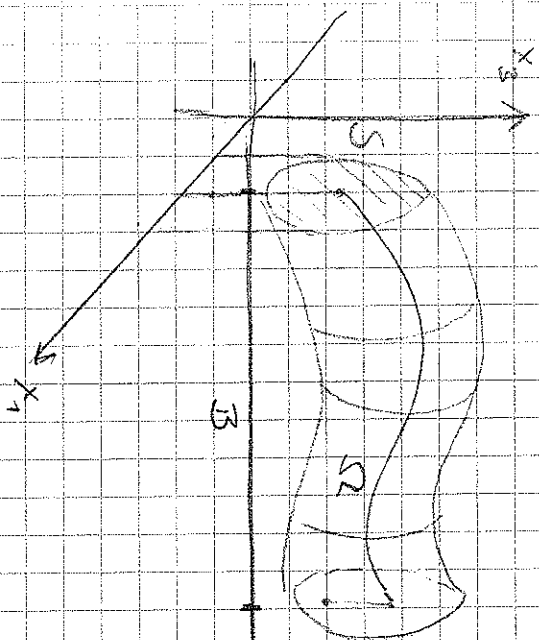
$$(0) \int \mathbb{1}_A(x) \lambda^n(dx) = \lambda^n(A) \quad (\text{spezielle Treppenfunktion})$$

$$(1a) \int \alpha f(x) + \beta g(x) \lambda^n(dx) = \alpha \int f(x) \lambda^n(dx) + \beta \int g(x) \lambda^n(dx) \quad \left. \begin{array}{l} f \leq g \Rightarrow \int f(x) \lambda^n(dx) \leq \int g(x) \lambda^n(dx) \\ (\text{Monotonie}) \end{array} \right\}$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \int \mathbb{1}_{[a,b]}(x) f(x) \lambda^1(dx)$$

$$(3) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lambda^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(A_\pi \alpha + U_\pi u) \lambda^{n-k}(du) \lambda^k(d\alpha)$$

Beispiel: Strafen $\Omega = \{ u_{\Gamma}^T u + A_{\Gamma}^T (f(u) + a) \mid u \in B, a \in S \}$ $\lambda^u(\Omega) = \lambda^k(S) \lambda^{n-k}(B)$



$$\mathbb{1}_{\Omega}(x) = 1$$

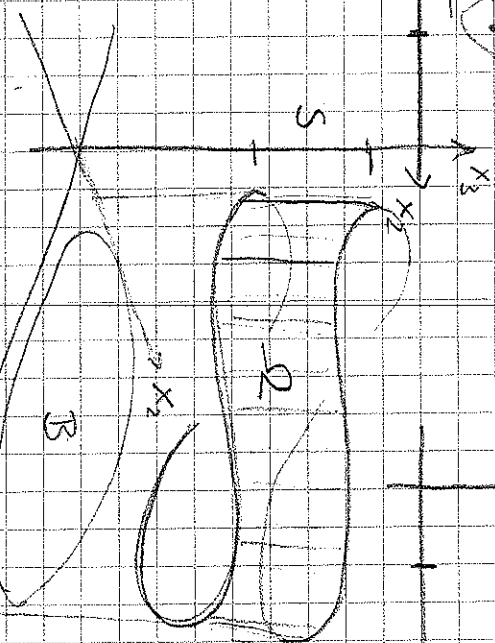
$$\Leftrightarrow x \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow x = u_{\Gamma}^T u + A_{\Gamma}^T (f(u) + a) \quad u \in B, a \in S$$

$$\Leftrightarrow u_{\Gamma}^T x = u \in B$$

$$A_{\Gamma}^T x = f(u) + a = f(u_{\Gamma}^T x) + a, \quad a \in S$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{1}_B(u_{\Gamma}^T x) \mathbb{1}_S(A_{\Gamma}^T x) = \mathbb{1}_S(f(u_{\Gamma}^T x))$$



$$\chi^u(a) = \int \mathbb{1}_{\Omega}(x) \chi^u(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k} \mathbb{1}_B(u) \mathbb{1}_S(a) \chi^u(da) \chi^{n-k}(du)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{(n-k) \times 1}} \mathbb{1}_B(u) \chi^k(S) \chi^{n-k}(du) = \chi^{n-k}(B) \chi^k(S)$$

Ansbande:

$$\lambda^n(\text{graph}) = 0$$

$$\Gamma = \{ u_{\Gamma}^T u + A_{\Gamma}^T (f(u) + a) \mid u \in B, a \in S \}$$

$$= \{ u_{\Gamma}^T u + A_{\Gamma}^T (f(u) + a) \mid u \in B, a \in S \}$$

$$\lambda^n(\Gamma) = \lambda^{n-k}(B) \lambda^k(\{0\}) = 0$$

$$= [0, 0]$$

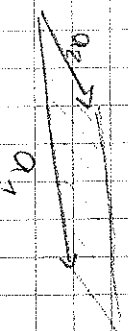
Mit Kollimation der Beispiele zeigt man für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det(AQ^n) = |\det A| \quad \text{mit} \quad Q^n = \{x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \mid 0 \leq x_i \leq 1\} = [0, 1]^n$$

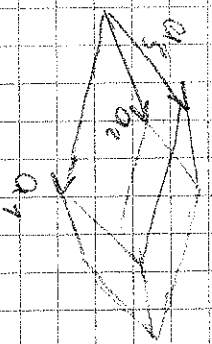
beachte: $AQ^n = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i a_i \mid 0 \leq x_i \leq 1 \right\}$ wenn $A = (a_1, \dots, a_n)$

Parallelepiped, wenn a_i lin. unabh.

$n=2$

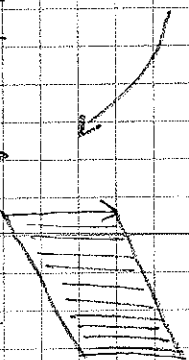
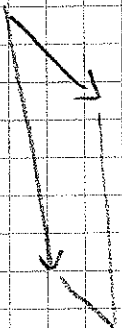


$n=3$



Spalt, wenn a_i lin. unabh.

Idee: • Scherung von AQ^n verwandelt AQ^n in Streifengebiet



• Shearformel führt Volumen auf Dimension zurück ... Induktion!

Basis:

Fall $A = 0$:

$$AQ = \{0\} = [0, 0]^{n \times n} \cdot [0, 0]$$

$$\lambda(AQ) = \lambda([0, 0])^n = 0^n = 0 = |\det A|$$

Fall $A \neq 0$, $\det A \neq 0$: an gibt $1 \leq k \leq n$ und $\sigma \in S_n$ mit

$$a_{\sigma(k)} = \sum_{j=k+1}^n c_{kj} a_{\sigma(j)} \quad k=1, \dots, k$$

wird $u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(n)}$ linear unabh.

$$y \in AQ \Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^n x_i a_i, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sum_{j=k+1}^n \left(\sum_{i=1}^k c_{ij} x_i \right) a_{\sigma(j)}$$

$$\text{Sei } M = U_{\pi}(AQ)$$

Sei $u \in M$ gibt es eindeutig $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ mit $u = \sum_{j=k+1}^n \lambda_j u_{\pi(a_{\sigma(j)})}$

$$\text{Sei } f(u) = \sum_{j=k+1}^n \lambda_j A_{\pi(a_{\sigma(j)})}$$

$$\text{Dann } y \in AQ \Leftrightarrow y = U_{\pi} U_{\pi}^T y + A_{\pi}^T f(U_{\pi} y) \quad \Rightarrow \quad AQ^T \text{ ist Graph} \Rightarrow \lambda(AQ^T) = 0 = |\det A|$$

Fall $\det A \neq 0$: Induktion über n .

$$n=1 \quad A = (a) \quad A Q^T = a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & a < 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & a \end{bmatrix} & a \geq 0 \end{cases}$$

$$\lambda(A Q^T) = |a| = |\det A| \quad \checkmark$$

Sei Beh. richtig für $n-1 \geq 1$

Fall $(a_n)_n \neq 0$: $\lambda^n(\sigma_n A Q^T) = \lambda^n(A Q^T)$ für Schwarzzen $\sigma_n(x) = x - \frac{(a_n)_i}{(a_n)_n} x_n e_i \quad i=1, \dots, n-1$

beachte $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_{n-1} & 0 \\ (a_1)_n & (a_{n-1})_n & (a_n)_n \end{pmatrix}$ mit $(\tilde{a}_i)_n = (a_i - \frac{(a_i)_n}{(a_n)_n} a_n)_n \quad i=1, \dots, n-1$

daher $\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} A Q^T = \{ U_n^T u + A_n^T (p(u) + a) \mid u \in \tilde{A} Q^{n-1}, a \in (a_n)_n [0, n] \}$

$\pi_n(n, 1, 2, \dots, n-1)$
 $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{n-1}$ sind l.u.

da $\det(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} A) = \det A \neq 0$

Sei u gibt es eindeutig $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$

mit $u = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \tilde{a}_i \quad f(u) := \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (a_i)_n$

also $\lambda^n(A Q^T) = \lambda^n(\tilde{A} Q^{n-1}) \lambda^n((a_n)_n [0, 1])$
 $= |\det \tilde{A} \cdot (a_n)_n| = |\det(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} A)| = |\det A|$

Fall $(a_n)_t = 0$, $\det A \neq 0$ Es gibt k mit $(a_n)_k \neq 0$

$$\sigma(x) = x + x_k e_n \quad \text{Schervung}$$

$$\lambda^n(AQ^n) = \lambda^n(\underbrace{\sigma A}_{\tilde{A}} Q^n) \quad \text{mit} \quad \det \tilde{A} = \det \sigma \det A \neq 0$$

$$\text{und} \quad \tilde{A}_m = (a_n)_n + (a_n)_k = (a_n)_k = (a_n)_k \neq 0$$

$$\text{also} \quad \lambda^n(AQ^n) = \lambda^n(\tilde{A} Q^n) = |\det \tilde{A}| = |\det A|$$



4) "Integralsubstitutionsatz" = mehrdim. Substitutionsregel

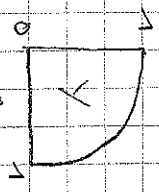
$$\gamma: X \rightarrow Y \quad \text{Diffeomorphismus}, \quad f: Y \rightarrow \mathbb{R}$$

$\gamma: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ offen

Dann ist $f \circ \gamma$ integrierbar auf X genau dann, wenn $f \circ \gamma$ integrierbar ist auf Y und

$$\int_X (f \circ \gamma) \lambda^m(dx) = \int_Y f(y) \lambda^n(dy)$$

Beispiel



$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x_1 \cos x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{pmatrix} \quad \text{Polarkoordinaten}$$

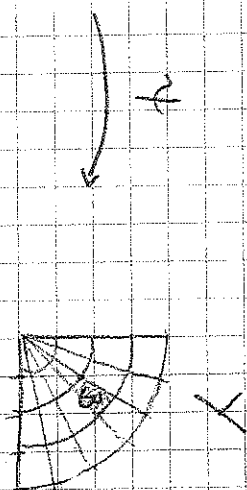
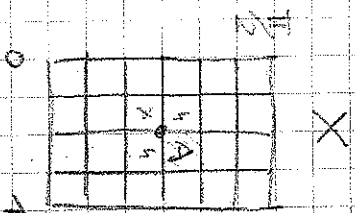
$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \end{pmatrix} \quad |\det \gamma'(x)| = |\cos^2 x_2 + x_1^2 \sin^2 x_2| = x_1$$

Flächeninhaltberechnung:

$$\begin{aligned} \lambda^2(Y) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbb{1}_Y(y) \lambda^2(dy) \stackrel{(\ast)}{=} \int_X \mathbb{1}_Y(\gamma(x)) \lambda^2(dx) \stackrel{(\ast\ast)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 x_1 dx_2 dx_1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

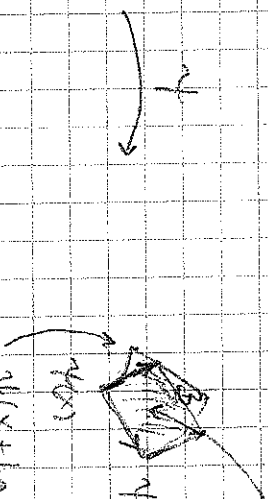
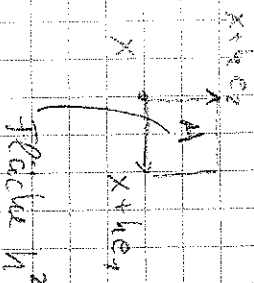
$\mathbb{R}^{2n} \leftarrow \text{Integriervolumen } Y$

intuitive Begründung für Determinantenfaktor:



$$\int_Y f(y) \lambda^n(dy) \approx \sum_i f(y_i) \lambda^n(B_i) = \sum_i f(\varphi(A_i)) \lambda^n(\varphi(A_i))$$

$$\lambda^n(B) \approx |\det(h_1 y(x), h_2 y(x))| = h^2 | \det \varphi'(x) |$$



$$\varphi(x+h_2 e_2) \approx \varphi(x) + h_2 \partial_2 \varphi(x)$$

Determinantenfaktor ist "Flächenverzerrungsfaktor"

$$\frac{\lambda^n(dy)}{\lambda^n(dx)} = \frac{\lambda^n(\varphi(dx))}{\lambda^n(dx)} = 1 \det \varphi'(x)$$

$$\text{Hauptsatz: } \int_Y f(y) \lambda^n(dy) = \int_X f(\varphi(x)) \lambda^n(\varphi(dx)) = \int_X f(\varphi(x)) \frac{\lambda^n(\varphi(dx))}{\lambda^n(dx)} \lambda^n(dx) = \int_X f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| \lambda^n(dx)$$

mit dem Transformationsatz folgt

$$\lambda^n(A\Omega + c) = \lambda^n(\Omega) \quad \text{wenn } |\det A| = 1 \quad \text{also etwa für alle Drehungen / Spiegelungen}$$

$$\text{denn} \quad \lambda^n(A\Omega + c) = \int 1 \lambda^n(dy) = \int_{\Omega} 1 \cdot \psi \cdot |\det \psi(x)| \lambda^n(dx) = \int_{\Omega} 1 \lambda^n(dx) = \lambda^n(\Omega)$$

$$\psi(x) = Ax + c, \quad X = \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\psi'(x) = A \quad |\det \psi'(x)| = |\det A| = 1$$

5) "Integration auf Flächen und anderen dünnen Objekten"

$X \subset \mathbb{R}^{m+1}$ offen, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R}^{n+1})$ injektiv und φ' habe vollen Rang auf X

Dann ist $f: \varphi(X) \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich dem m -dimensionalen Lebesguemaß λ_Y auf $Y = \varphi(X)$ genau dann integrierbar, wenn $G_Y(\varphi): X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich λ^m ist

$$\int_Y f(y) \lambda_Y(dy) = \int_X f(\varphi(x)) G_Y(x) \lambda^m(dx)$$

mit der Grauschen Determinante

$$G_Y(x) = \sqrt{\det(\varphi'(x)^T \varphi'(x))}$$

Beispiele: $m=1$

$$G_Y(x) = \|\varphi'(x)\|_2$$

$$\text{Bogenlänge: } \lambda_Y(Y) = \int \lambda_Y(dy) = \int_X \|\varphi'(x)\|_2 \lambda^m(dx)$$

$n=3, m=2$

$$G_Y(x) = \|\partial_1 \varphi(x) \times \partial_2 \varphi(x)\|_2$$

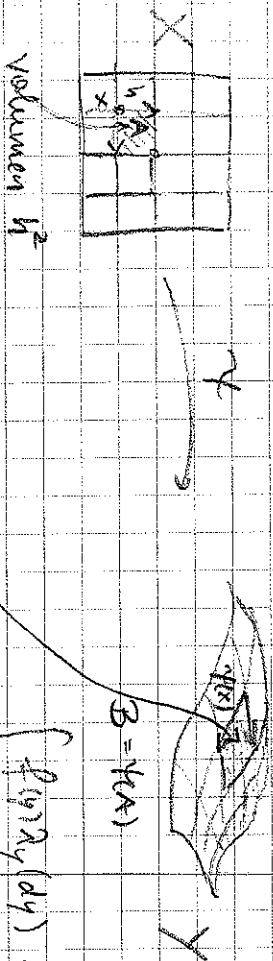
$m=n$

$$G_Y(x) = |\det \varphi'(x)|$$

Kugelkoordinaten, Zylinderkoordinaten

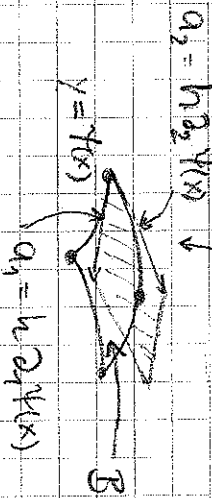
... siehe Übung

nehme Begründung für die Gaußsche Deformationsrate



$$\int_Y f(y) \lambda_y(dy) \approx \sum f(y_i) \lambda(B_i) \approx \sum f(\phi(x_i)) G_{\phi(x_i)} h^m$$

$$\approx \int_X f(\phi(x)) G_{\phi(x)} \lambda^m(dx)$$



$$\lambda_y(B) \approx \text{Flächeninhalt des Parallelogramms } P$$

in der Tangentialebene $T = \text{span}\{a_1, a_2\}$

Berechnung des m-dim Volumens von P :

1) Führe ONB $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ von T ein

2) $a_i = \sum_j \hat{A}_{ij} b_j \leadsto \hat{A} Q^m$ sind b_i -Koordinaten von P beachte $\hat{A}_{ij} = b_i \cdot a_j$

3) Volumen := $\lambda^m(\hat{A} Q^m) = |\det \hat{A}| = \sqrt{\det \hat{A}^T \hat{A}} = \sqrt{\det(\hat{A}^T \hat{A})} = \sqrt{h^m \det \phi'(x)^T \phi'(x)} = h^m G_{\phi(x)}$

$$(\hat{A}^T \hat{A})_{ij} = \sum_k (a_k \cdot b_i) (b_k \cdot a_j) = a_i^T \sum_k (b_k \cdot a_j) b_k = a_i^T a_j \leadsto ((h \phi'(x))^T (h \phi'(x)))_{ij}$$

Beispiel: Oberfläche 3-dim Halbkugel

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \end{pmatrix} \quad x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^{2n} \quad \text{ist Parametrisierung vom Graph-Typ} \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\psi'(x) = \begin{pmatrix} I \\ \underbrace{f'(x)}_{n-1} \end{pmatrix} \quad \psi'(x)^T \psi'(x) = \begin{pmatrix} I & \nabla f(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ \nabla f(x)^T \end{pmatrix} = I + \nabla f(x) \nabla f(x)^T$$

Fall $\nabla f(x) = 0$ dann $G_\psi(x) = |\det J| = 1 = \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|_2^2}$

Fall $\nabla f(x) \neq 0$ dann gibt es OB von $\mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$

$$\nabla f(x) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

insbesondere $A = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ invertierbar

$$(I + \nabla f(x) \nabla f(x)^T) a_1 = (1 + \|\nabla f(x)\|_2^2) a_1$$

$$(I + \nabla f(x) \nabla f(x)^T) a_i = a_i \quad i \geq 2$$

$$\leadsto (I + \nabla f(x) \nabla f(x)^T) A = \begin{pmatrix} 1 + \|\nabla f(x)\|_2^2 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} A \quad \leadsto G_\psi(x) = |\det (I + \nabla f(x) \nabla f(x)^T)| = \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|_2^2}$$

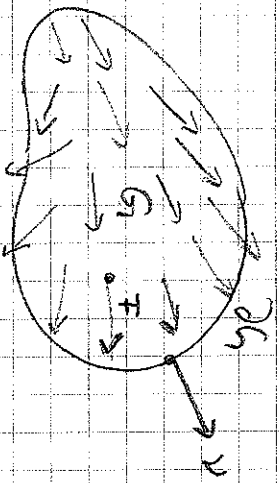
allgemein $\psi(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \leadsto G_\psi(x) = \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|_2^2}$

Polarisation

$$\text{speziell} \quad G_\psi(x) = \sqrt{1 + \frac{\|x\|_2^2}{1 - \|x\|_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}} \quad \lambda_\psi(y) = \int_{B_1(0)} G_\psi(x) \lambda^2(dx) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi$$

6) "Gaußsche Integralsatz" = verallgemeinerter Hauptsatz



- $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend, $n \geq 2$
- ∂G stückweise glatt, "gebiet"
- d.h. stückweise durch differenzierbare Parametrisierungen beschrieben
- $\nu(x)$ ^{in $\mathbb{R}_n$ normierter} äußerer Normalenvektor $x \in \partial G$ (wo ∂G glatt parametrisiert ist)
- $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbares Vektorfeld mit U offene Menge, die $\overline{G}$ enthält

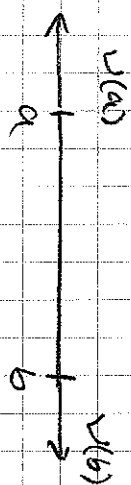
Dann gilt

$$\int_G \operatorname{div} F(x) \lambda^n(dx) = \int_{\partial G} F(x) \cdot \nu(x) \lambda_{\partial G}^n(dx)$$

↙ Divergenz von F $\operatorname{div} F = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \dots + \partial_n F_n$

wieso verallgemeinertes Hauptsatz?

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$



mit $G = (a, b)$, $f'(x) = \partial_1 f_1(x) = \operatorname{div} f(x)$, $v(x) = \begin{cases} +1 & x=b \\ -1 & x=a \end{cases}$

$$\int_G \operatorname{div} f(x) \lambda(dx) = \sum_{x \in \partial G} (f \cdot v)(x)$$

$\uparrow$ "Volumenintegral"
 $\uparrow$ "Randsumme"
 der Divergenz der Normalkomponente

Satz von Gauss kann genutzt werden wie HS, ...

a) zur Berechnung von Integralen

G : Kugel um O mit Radius $r > 0$, ... äußerer Normalenvektor $\nu(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$

$$\int_G x_i \lambda_G(dx) = r \int_G e_i \cdot \nu(x) \lambda_G(dx) \stackrel{\text{Gauß}}{=} r \int_G \underbrace{\operatorname{div} e_i}_{=0} \lambda^n(dx) = 0$$

$$\int_G x_i x_j \lambda_G(dx) = r \int_G \underbrace{(x_j e_i) \cdot \nu(x)}_{=F(x)} \lambda_G(dx) = r \int_G \underbrace{\operatorname{div} F(x)}_{\substack{=0 \quad i \neq j \\ =1 \quad i=j}} \lambda^n(dx) = r \delta_{ij}$$

etc

b) zur Herleitung von Integrationsregeln... z.B. partielle Integration

$$\int_G f(x) \partial_i g(x) \lambda^n(dx) = \int_G (f \cdot g \cdot v_i)(x) \lambda_G^n(dx) - \int_G g(x) \partial_i f(x) \lambda^n(dx)$$

$$\text{denn } f(x) \partial_i g(x) = \partial_i (f(x) g(x)) - g(x) \partial_i f(x)$$

Produktregel

$$= \operatorname{div} F(x) - g(x) \partial_i f(x)$$

$$\text{mit } F(x) = f(x) g(x) e_i$$

$$\text{also } F(x) \cdot v(x) = f(x) g(x) v_i(x)$$

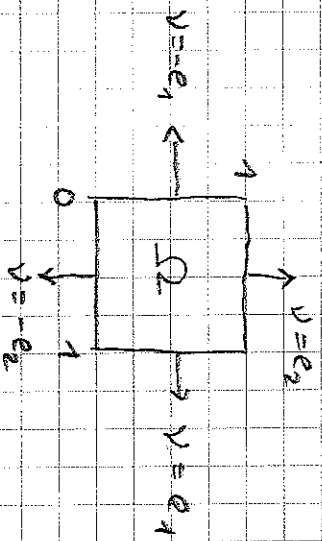
Spezialfall: Greensche Formel

$$\Delta f(x) := \operatorname{div} \nabla f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{i,i}^2 f(x) \quad \text{"Laplace Operator"}$$

$$\int_G g \Delta f \lambda^n(dx) = \sum_i \int_G g \partial_i \partial_i f \lambda^n(dx) = \sum_i \int_G g \partial_i f v_i \lambda_G^n(dx) - \sum_i \int_G \partial_i g \partial_i f \lambda^n(dx)$$

$$= \int_G g \operatorname{div} \nabla f \lambda_G^n(dx) - \int_G \nabla g \cdot \nabla f \lambda^n(dx)$$

Satz von Gauss im Spezialfall nachgerechnet:



$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) \lambda^2(dx) = \int_{\Omega} \partial_1 F_1(x) \lambda^2(dx) + \int_{\Omega} \partial_2 F_2(x) \lambda^2(dx)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{dx_1} F_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{dx_2} F_2(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

$$\stackrel{\text{ZxHS}}{=} \int_0^1 F_1(1, x_2) - F_1(0, x_2) dx_2 + \int_0^1 F_2(x_1, 1) - F_2(x_1, 0) dx_1$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (v \cdot F)(\gamma'_E(t)) \|\gamma'_E(t)\|_2 dt \quad \gamma_E(t) = (1, t) \quad v(\gamma_E(t)) = e_1$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 (v \cdot F)(\gamma'_N(t)) \|\gamma'_N(t)\|_2 dt \quad \gamma_N(t) = (0, t) \quad v(\gamma_N(t)) = -e_1$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 (v \cdot F)(\gamma'_M(t)) \|\gamma'_M(t)\|_2 dt \quad \gamma_M(t) = (t, 1) \quad v(\gamma_M(t)) = e_2$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 (v \cdot F)(\gamma'_S(t)) \|\gamma'_S(t)\|_2 dt \quad \gamma_S(t) = (t, 0) \quad v(\gamma_S(t)) = -e_2$$

$$= \int_{\partial \Omega} (v \cdot F)(x) \lambda_1(dx)$$