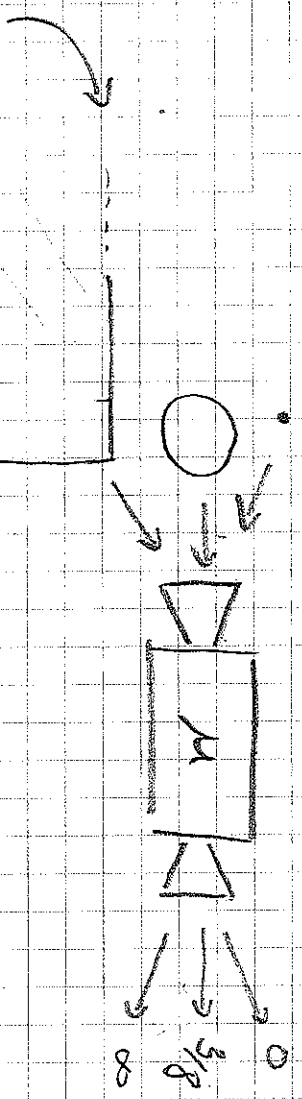


Kapitel 15: Maße

Ein Maß μ auf X bewertet Teilmengen von X ,



Ergebnisse sind aus $[0, \infty) \cup \{\infty\}$
bzw. aus $[0, \infty]$

Teilmengen von X
sind Elemente
der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$

d.h. $\mu: A \rightarrow [0, \infty]$
mit $A \in \mathcal{P}(X)$ und $[0, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

vereinbare Rechenregeln
= intuitive Regeln sofern sinnvoll:

$\exists b. -\infty < a < \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$

oder $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ für alle $0 < a \leq \infty$

oder $\infty + a = a + \infty = \infty$ für alle $a \in (-\infty, \infty]$ etc.

nicht auf ist $\infty + (-\infty) \dots$ damit: $\overline{\mathbb{R}}$ kein Körper

paradox zu Körper auf: $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = (-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0$

Um mit A, B auch
 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ etc
bewerten zu können,
fordert man Struktur von $\mathcal{A}$:
" σ -Algebra "

Definition 15.1: (σ -Algebra) Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X . Dann heißt $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra über X , falls

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii) für jeden $A \in \mathcal{A}$ ist $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii) für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{A})$ Maßraum und jeder $A \in \mathcal{A}$ heißt $(\mathcal{A})$ -messbar.

Beispiele: • $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$... d.h. aber trivial

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ d.h. jede Teilmenge ist messbar ... gilt für endliche X ;
für unendliche X kann es aber schon sein, daen Mengen sinnvoller
Maß zugeordnet

Konstruktion "kleinster" σ -Algebren:

Lemma 15.2 Sind $A_i, i \in I$ σ -Algebren auf X , dann auch $\bigcap_{i \in I} A_i$

Beweis: beachte $A_i \subseteq \bigcap_{j \in I} A_j = A \Leftrightarrow \forall i \in I: A_i \subseteq A$ also $\emptyset, X \in A$ und auf $A \in A$

ist $A \in A_i$ für alle i d.h. $A^c \in A_i$ für alle i da A_i σ -Algebra d.h. $A^c \in A$, genauso für $\bigcup_{i \in I} A_i$

Definition 15.3 Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem. Wobei sei

$$\Sigma(\mathcal{E}) := \{ A \mid \mathcal{E} \subseteq A, A \text{ } \sigma\text{-Algebra auf } X \}$$

das kleinste σ -Algebra, das $\mathcal{E}$ enthält

Dann nennt man $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{A \in \Sigma(\mathcal{E})} A$ die kleinste σ -Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält und $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von $\sigma(\mathcal{E})$

Beispiel wie die Beispiele

" (X, τ) topologischer Raum, $\mathcal{B}(X, \tau) := \sigma(\mathcal{C})$ heißt Borelsche σ -Algebra"

für uns besonders wichtig: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$... Borelsche σ -Algebra zur Mathematik

" $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i=1, \dots, n}$ Räume, $X := X_1 \times \dots \times X_n$ Produktraum"

$\mathcal{A} := \{ A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{A}_i, i=1, \dots, n \}$ "Rechtecke", $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \sigma(\mathcal{A})$ heißt

Produkt σ -Algebra auf X

Bew: Bedingungen an $\mathcal{B}$ -Algebra $\mathcal{A}$ sind minimalistisch formuliert ...
 tatsächlich ist $\mathcal{A}$ mit allen booleschen Mengenoperationen verträglich!

z.B. $A, B \in \mathcal{A}$ definiere $A_1 = A, A_2 = B, A_n = \emptyset \quad n \geq 3$

dann $A \cup B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

dann auch $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$ genau $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c)^c \in \mathcal{A}$
 oder hier $\underbrace{A^c}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{B^c}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

und auch $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$

$\underbrace{A}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{B^c}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

und auch $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ etc

Definition 15.4: (Maß) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$, falls gilt

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ ($n \neq m$) gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \quad \text{"}\sigma\text{-Additivität"}$$

In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum

Ist $\mu(X) < \infty$ so heißt μ endlich

Ist $\mu(X) = 1$ so heißt μ Wahrscheinlichkeitsmaß und $(X, \mathcal{A}, \mu)$

Wahrscheinlichkeitsraum.

Beweis.

Seien $A, B \in \mathcal{A}$ disjunkt

definiere $A_1 = A, A_2 = B, A_n = \emptyset \quad n \geq 3$

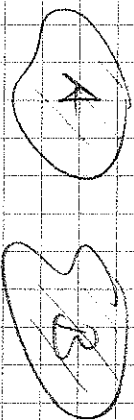
dann $A_1 \cap A_n = \emptyset \quad (n \neq 1)$ also

$$\mu(A \cup B) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A) + \mu(B) + 0 + 0 + \dots$$

Symbol für disjunkte Vereinigung

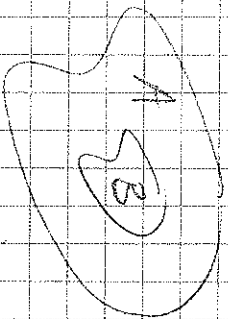
$$\hookrightarrow \mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B)$$

"Additivität"



oder auch

für $B \subseteq A$



$$B \cup (A \setminus B) = A$$

$$\text{also } \mu(A) = \mu(B) + \underbrace{\mu(A \setminus B)}_{\geq 0} \geq \mu(B)$$

$$\text{d.h. } B \subseteq A \Rightarrow \mu(B) \leq \mu(A) \quad \text{"Monotonie"}$$

$$\text{! Achtung! } B \subseteq A \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$$

stimmt nur wenn

$\mu(B) < \infty$ sonst

nicht definiert ($\infty - \infty$)

Beispiele:

1) Dirac-Maß

Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $\bar{x} \in X$

$$\delta_{\bar{x}}(A) := \begin{cases} 1 & \bar{x} \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist ein Maß, denn $\delta_{\bar{x}}(\emptyset) = 0$

und für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt

$$\delta_{\bar{x}}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1 \iff \bar{x} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \exists! n \in \mathbb{N} : \bar{x} \in A_n \iff \exists! n \in \mathbb{N} : \delta_{\bar{x}}(A_n) = 1$$

$$\text{also } \delta_{\bar{x}}(\bigcup A_n) = \sum \delta_{\bar{x}}(A_n) \quad \text{b. Additivität} \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{\bar{x}}(A_n) = 1$$

Bem.: Das Dirac-Maß $\mu = \delta_{\bar{x}}$ ist ein endliches Maß d.h. $\mu(X) < \infty$

und sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß d.h. $\mu(X) = 1$
 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt in diesem Fall auch Wahrscheinlichkeitsraum.

2) Positivkohlentationen von Maßen

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \quad \mu_1, \dots, \mu_n \text{ Maße auf } (X, \mathcal{A})$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i \right) (A) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i(A) \quad \text{ist Maß auf } (X, \mathcal{A})$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{z.B. } X = \{1, 2\} & \text{mögliche Ausgänge eines Münzwurfs,} \\ \mathcal{A} = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} & \\ P = \frac{1}{2} \delta_1 + \frac{1}{2} \delta_2 & \text{ist W-Maß auf } X \end{array} \right.$$

3) Zählmaß

$$\text{Sei } (X, \mathcal{A}) \text{ Messraum} \quad 1:1 \quad A \rightarrow [0, \infty] \quad \text{ist Maß auf } (X, \mathcal{A})$$

$$A \rightarrow |A| \quad (\text{siehe Übung aus A1})$$

↓ Elementarereignis

z.B. $X = \{1, \dots, 6\}$ mögliche Ausgänge eines Würfelwurfs

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(X), \quad P(A) = \frac{|A|}{|X|} = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \delta_x(A) \quad \text{W-Maß auf } X$$

↖ Anzahl Elemente in A

$$E = \{2, 4, 6\} \quad \text{Ereignis}$$

"gerade"

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad F = \{4, 5, 6\} \quad \text{"gerade und größer 3"}$$

gerade und größer 3

$$P(E \cap F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4) geometrischer Inhalt: Länge, Flächeninhalt, Volumen ...

Definition und Satz 15.5: (Ubiquue Mq3)

Es existiert genau ein Maß λ^n auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{\text{wobei } [a,b] = [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n] \text{ ein } n\text{-dim Intervall ist}}$ mit der Eigenschaft $\lambda^n([a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n]) = (b_1 - a_1)^+ \cdot (b_2 - a_2)^+ \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)^+$

Das Maß λ^n heißt n -dimensionaler Lebesguemaß und es ist verschiebungsinvariant

d.h. $\lambda^n(c + A) = \lambda^n(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und alle $c \in \mathbb{R}^n$

Beweis: A.III