

Kapitel 16: Treppenfunktionen und messbare Funktionen

Definition 16.1: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, $A_1, \dots, A_n$ seien pd (paarweise disjunkt) und $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. Dann heißt $s = \sum_{i=1}^n s_i \mathbb{1}_{A_i}$ (A-)Treppenfunktion.

Ist μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ dann heißt

$$\int s(x) \mu(dx) := \sum_{i=1}^n s_i \mu(A_i) \quad \mu\text{-Integral von } s$$

[Hilfreich beim Arbeiten mit Treppenfunktionen ist

Beobachtung: Seien $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Dann gilt $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A \cap B}$,

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B} \quad \text{d.h. wenn } A, B \text{ pd} \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$$

$$\text{Beweis: } (\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B)(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \cap B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$$

$$(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)(x) = \begin{cases} 2 & x \in A \cap B \\ 1 & x \in A \cup B \setminus (A \cap B) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \mathbb{1}_{A \cap B}(x) + \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$$

$$\text{Wegen } A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \text{ folgt } \mathbb{1}_{A \setminus B} + \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A$$

Beachte: Treppenfkt kann unterschiedliche Darstellung haben

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{1} \\ \text{1} \\ \text{1} \\ \text{0} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{1} \\ \text{1} \\ \text{1} \\ \text{0} \end{array} \\
 &= 2 \mathbb{1}_{[0,2)} + \mathbb{1}_{[2,3)} + 2 \mathbb{1}_{[3,4]} \\
 &= 2 \mathbb{1}_{[0,2) \cup [3,4]} + \mathbb{1}_{[2, \frac{5}{2})} + \mathbb{1}_{[\frac{5}{2}, 3)} \\
 &= \text{etc}
 \end{aligned}$$

"kanonische" Darstellung

$$S = \sum_{\alpha \in S(X)} \mathbb{1}_{\{s=\alpha\}}$$

$\{s=\alpha\} = \{x \mid S(x)=\alpha\}$ sind pot und

beachte: $\int S(x) \mu(dx)$

$$= \sum s_i \mu(A_i)$$

$$= \sum_{\alpha \in S(X)} \alpha \sum_{i: s_i=\alpha} \mu(A_i)$$

$$= \underbrace{\mu\left(\bigcup_{i: \alpha=s_i} A_i\right)}_{\mu(s=\alpha)}$$

$$= \sum_{\alpha \in S(X)} \alpha \mu(s=\alpha) \quad \text{unabh. von der Darstellung!}$$

$$= \bigcup_{i: \alpha=s_i} A_i \quad \text{wenn } s = \sum s_i \mathbb{1}_{A_i}$$

$e \in A$ als endliche Vereinigung messbarer Mengen

beachte $\bigcup_{\alpha \in S(X)} \{s=\alpha\} = X$

d.h. Stufenmengen zerlegen X

Satz 16.3: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum. Sind S, t $\mathcal{A}$ -Treppenfunktionen, dann auch λS und $S+t$ und es gilt $\int \lambda S \mu(dx) = \lambda \int S \mu(dx)$, $\int S+t \mu(dx) = \int S \mu(dx) + \int t \mu(dx)$, $S \leq t \Rightarrow \int S \mu(dx) \leq \int t \mu(dx)$

Beweis: $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \mathbb{1}_{\{S=\alpha\}}$

$\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda S = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} (\lambda \alpha) \mathbb{1}_{\{S=\alpha\}}$ ist Treppenfunktion ✓ $\int \lambda S \mu(dx) = \sum \lambda \alpha \mu(S=\alpha) = \lambda \sum \alpha \mu(S=\alpha)$

mit $t = \sum_{\beta \in \mathbb{R}} \beta \mathbb{1}_{\{t=\beta\}}$ ist $\{t=\beta\} = \{t=\beta\} \cap \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \{S=\alpha\} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \{t=\beta\} \cap \{S=\alpha\}$

d.h. $\{t=\beta\} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \{(S,t)=(\alpha,\beta)\}$, $\{S=\alpha\} = \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \{(S,t)=(\alpha,\beta)\}$

(Probabilität) $\mathbb{1}_{\{t=\beta\}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(S,t)=(\alpha,\beta)\}}$ $\mathbb{1}_{\{t=\alpha\}} = \sum_{\beta \in \mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(S,t)=(\alpha,\beta)\}}$

$S+t = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{\beta \in \mathbb{R}} \alpha \mathbb{1}_{\{t=\beta, S=\alpha\}} + \sum_{\beta \in \mathbb{R}} \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \beta \mathbb{1}_{\{t=\beta, S=\alpha\}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{\beta \in \mathbb{R}} (\alpha+\beta) \mathbb{1}_{\{t=\beta, S=\alpha\}}$

d.h. $S+t$ ist Treppenfunktion

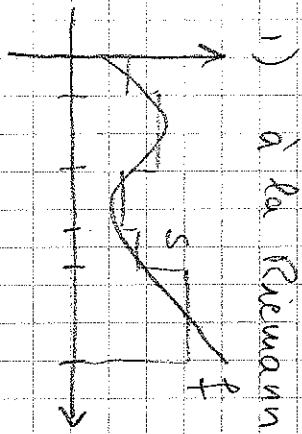
Stapeln wir sind disjunkt und überdecken

$$\begin{aligned}
 \int_{s+t} \mu(dx) &= \sum_{\substack{\alpha \in S(x) \\ \beta \in t(x)}} (\alpha + \beta) \mu(s=\alpha, t=\beta) = \sum_{\alpha \in S(x)} \alpha \underbrace{\sum_{\beta \in t(x)} \mu(s=\alpha, t=\beta)}_{\leftarrow} \\
 &\quad + \sum_{\beta \in t(x)} \beta \sum_{\alpha \in S(x)} \mu(s=\alpha, t=\beta) \\
 &= \mu\left(\bigcup_{\beta \in t(x)} \{s=\alpha, t=\beta\}\right) \\
 &= \mu(s=\alpha) \\
 &= \int_s \mu(dx) + \int_t \mu(dx)
 \end{aligned}$$

da $\mu(s=\alpha, t=\beta) = 0$ wenn $\beta < \alpha$

$$\begin{aligned}
 \text{wenn } s \leq t \quad \int_s \mu(dx) &= \sum_{\substack{\alpha \in S(x) \\ \beta \in t(x)}} \alpha \mu(s=\alpha, t=\beta) \stackrel{\leftarrow}{=} \sum_{\substack{\alpha \in S(x) \\ \beta \in t(x)}} \beta \mu(s=\alpha, t=\beta) = \int_t \mu(dx) \quad \square
 \end{aligned}$$

wie approximiert man allgemeine Funktionen durch Treppenfunktionen?



- wähle einfache Stufenmengen A_i

↖ so dass $\mu(A_i)$ einfach berechnet werden kann

↖ bei genau Volumen: Intervalle, Rechtecke, Quadrate...

- wähle sinnvolle Stufenweite auf A_i z.B. $f(\xi_i)$

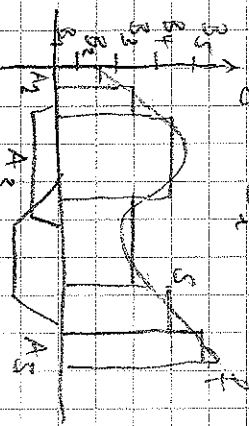
Vorteil: konstruktive Definition ... programmierbar!

Nachteil: theoretische Eigenschaften (Approximationsverhalten der Treppenfunktionen)

↖ $\xi_i \in A_i$ beliebig

2) à la Lebesgue

- zerlege Bildbereich $\mathbb{R}$ von f (nicht den Definitionsbereich!) in Mengen B_i
- definiere Stufenmengen als Urbilder $A_i = f^{-1}(B_i)$
- wähle Stufenwert $s_i \in B_i$



Vorteil: sehr gutes Approximationsverhalten auf beliebigen Definitionsbereichen

Nachteil: Stufenmengen indirekt definiert ... praktisch kaum nutzbar

↖ gut für Interpretation von $\mathbb{R}^n$

Leberque - also funktioniert nur, wenn $f^{-1}(B_i)$ messbar sind.

Definition 16.4 Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume. Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$ -messbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt.

Ist $Y = \mathbb{R}^n$ so wird $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vorausgesetzt, wenn $\mathcal{B}$ nicht anders spezifiziert ist.

welche Funktionen sind messbar? Baukastenprinzip...

Lemma 16.5: Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \sigma(\mathcal{E}))$ Messräume. Dann ist $f: X \rightarrow Y$ messbar, genau dann, wenn $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ für alle $E \in \mathcal{E}$.

Basis: " $\Leftarrow$ " Standard Methode im Umgang mit kleinsten σ -Algebren:

Sei $\mathcal{D} := \{B \in \sigma(\mathcal{E}) \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ oder $\mathcal{D} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

zu zeigen $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E})$, dazu dass $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \sigma(\mathcal{E})$ also f messbar.
folgende Inklusionen $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}$ erhält man so:

1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ nach Voraussetzung

" $\Rightarrow$ " also wegen $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$

Standard Methode 2) $\mathcal{D}$ ist σ -Algebra (Def überprüfen!)

$\Rightarrow \mathcal{D} \in \Sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}$

□

Definiert viele äquivalente Grenzwerte monotoner Funktionen mit

Lemma 16.6: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3) = \sigma(\mathcal{E}_4)$

mit $\mathcal{E}_1 = \{ (a, \infty) \mid a \in \mathbb{R} \}$, $\mathcal{E}_2 = \{ [a, \infty) \mid a \in \mathbb{R} \}$, $\mathcal{E}_3 = \{ (-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R} \}$, $\mathcal{E}_4 = \{ (-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R} \}$

Beweis: Nach Satz 15.5 ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}_0)$ mit $\mathcal{E}_0 = \{ [a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

Zeige $\mathcal{E}_i \in \sigma(\mathcal{E}_1)$, dann $\sigma(\mathcal{E}_1) \in \Sigma(\mathcal{E}_1)$ also $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$

also $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_4) \subset \sigma(\mathcal{E}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathcal{E}_0 \ni [a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a) = \underbrace{(-\infty, b]}_{\in \sigma(\mathcal{E}_1)} \cap \underbrace{(-\infty, a)}_{\in \sigma(\mathcal{E}_1)} \in \sigma(\mathcal{E}_1)$

$\mathcal{E}_1 \ni (a, \infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, \infty) \in \sigma(\mathcal{E}_2)$
 $\underbrace{\in \sigma(\mathcal{E}_1)}_{\text{denn } [a, \infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a - \frac{1}{n}, \infty) \in \sigma(\mathcal{E}_1)}$

$\mathcal{E}_2 \ni [a, \infty) = (-\infty, a)^c \in \sigma(\mathcal{E}_3)$

$\mathcal{E}_3 \ni (-\infty, a) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, a - \frac{1}{n}] \in \sigma(\mathcal{E}_4)$

$\mathcal{E}_4 \ni (-\infty, a] = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} [-c, a] \in \sigma(\mathcal{E}_0)$ □

Satz 16.7 Sei (X, τ) topologischer Raum, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f|_{B(\tau)}$ messbar.

Beweis: $B(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{U})$, Sei $E \in \mathcal{U}$ beliebig.
 $\nwarrow$ Betrachtung topologie auf $\mathbb{R}$

$E \in \mathcal{U}$ ist offen $\Rightarrow f^{-1}(E)$ ist offen also in $\tau \in B(\tau)$ $\square$

Lemma 16.8 Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum und $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

Dann ist $f = (f_1, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbb{R}^n$ messbar.

Beweis: Nach Satz 15.5 ist $B(\mathbb{R}^n) = B(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes B(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$

mit $\mathcal{E} = \{ B_1 \times \dots \times B_n \mid B_i \in B(\mathbb{R}) \}$. Sei $E \in B(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}$

$f^{-1}(E) = \{ x \in X \mid (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in E \} = \{ x \in X \mid (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in E \}$
 $= \bigcap_{i=1}^n \{ x \in X \mid f_i(x) \in B_i \} \in \mathcal{A}$ $\square$

Satz 16.9: Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, $(Z, \mathcal{C})$ Messräume, $f: Y \rightarrow Z$, $g: X \rightarrow Y$ messbar.

Dann ist $f \circ g: X \rightarrow Z$ messbar.

Beweis: $(f \circ g)^{-1}(C) = g^{-1}(f^{-1}(C))$ für alle $C \in \mathcal{C}$ $\square$

Seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ A -messbar. Verküpfte $(f, g): X \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Satz 16.9} \\ \text{also} \\ \text{messbar} \\ \text{Satz 16.8} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (u, v) \mapsto \alpha u + \beta v \\ (u, v) \mapsto u \cdot v \\ (u, v) \mapsto \max\{u, v\} \\ (u, v) \mapsto \min\{u, v\} \\ (u, v) \mapsto |u|^\alpha \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha f + \beta g \\ f \cdot g \\ \max\{f, g\} \\ \min\{f, g\} \\ |f|^\alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{messbar mit Satz 16.9} \\ \text{Lemma 16.8} \end{array}$$

Satz 16.10: Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum. Dann ist $\mathcal{A}_A$ A -messbar genau dann, wenn $A \in \mathcal{A}$.
Insbesondere sind A -Treppen funktoren messbar.

Beispiels: $\mathbb{1}_A$ messbar $\Leftrightarrow \mathbb{1}_A^{-1}([a, \infty)) = \begin{cases} X & a \leq 0 \\ A & 0 < a \leq 1 \\ \emptyset & a > 1 \end{cases} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$.
Lemma 16.5, 16.6

A -Treppen funktoren sind messbar dann $\sum_{i=1}^n s_i \mathbb{1}_{A_i} = s_1 \mathbb{1}_{A_1} + (s_2 \mathbb{1}_{A_2} + (\dots + (s_n \mathbb{1}_{A_n} + s_{n+1} \mathbb{1}_{A_{n+1}})))$
(formaler Basis durch Induktion über n)

messbar messbar messbar messbar messbar

Satz und Definitionen 16.11 Sei (X, A) Normraum und $D \in A$. Dann ist (D, A_D) ein Normraum mit der sog. Spur- σ -Algebra $A_D = \{D \cap A \mid A \in A\}$ auf D .

Beweis: Def überprüfen $\square$

$f: X \rightarrow Y$ A - B -messbar, $D \in A \Rightarrow f|_D: D \rightarrow Y$ A_D - B -messbar

da $(f|_D)^{-1}(B) = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in A} \cap D \in A_D$ für alle $B \in \mathcal{B}$

$f: D \rightarrow Y$ A_D - B -messbar, $g: D^c \rightarrow Y$ A_{D^c} - B -messbar $\Rightarrow h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ g(x) & x \in D^c \end{cases}$

da $h^{-1}(B) = D \cap f^{-1}(B) \cup D^c \cap g^{-1}(B) = (D \cap A) \cup (D^c \cap C) \in A$
 $\underbrace{= \underbrace{A \cap D}_{\in A} \cup \underbrace{C \cap D^c}_{\in A_{D^c}}}_{\in A}$ ist $A \cup B$ messbar

Dann auch Quotient von $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

$D = \{g \neq 0\} = g^{-1}(\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{offen}}) \in \mathcal{A}$ $\frac{f|_D}{g|_D}$ $\mathcal{A}_D$ messbar als Definition von

$(f|_{D|_D}, g|_{D|_D}): D \rightarrow \mathbb{R}^2$ messbar und $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
 $(a, v) \mapsto \frac{a}{v}$

Aufgeben $0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ $\mathcal{A}_D$ messbar

also $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ messbar

Werner: Verträglichkeit mit Grenzwerten

Satz 16.12. Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum und $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Dann sind inf f_n , sup f_n , liminf f_n , limsup f_n $\mathcal{A}$ -messbar. Ist (f_n) punktweise konvergent, dann ist $\lim f_n$ $\mathcal{A}$ -messbar.

Beweis: AIII

Lebesgue - Approximationssatz: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -messbar, $a_n \uparrow \infty$, $\Delta_n = \frac{2a_n}{N_n} > 0$

$$\mathbb{R} = (-\infty, -a_n) \cup [-a_n, -a_n + \Delta_n) \cup [-a_n + \Delta_n, -a_n + 2\Delta_n) \cup \dots \cup [a_n - \Delta_n, a_n) \cup [a_n, \infty) \quad \text{with } \Delta_n = 2^{-n}$$

$$S_n := -a_n \mathbb{1}_{\{f < -a_n\}} + \sum_{k=0}^{N_n-1} (-a_n + k\Delta_n) \mathbb{1}_{\{f \in [-a_n + k\Delta_n, -a_n + (k+1)\Delta_n)\}} + a_n \mathbb{1}_{\{f \geq a_n\}}$$

↑
members: (v)

$$\left\{ f \geq -a_n + b_n \Delta_n \right\} \cap \left\{ f \leq -a_n + (b_n + \epsilon_n) \Delta_n \right\}$$

3

(3)

Just $\|f\| \leq C$ down
gives $\|S_n f\|_\infty \leq \Delta_n$ falls
 $a_n \gg C$

für unbeschränkte f gilt an jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$: $|S_n(x) - f(x)| \leq \Delta_n$ falls $a_n \gg 1/f(x)$

Lemma 16.6: Sei (X, d) Metraum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sei messbar. Dann gilt es A -Treppenfunktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so dass $s_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in X$ und $s_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf allen Mengen der Form $\{ |f| \leq c \}$ für $c \in \mathbb{R}$.
Ist $f \geq 0$ dann kann (s_n) als monoton wachsend angenommen werden

Beweis: S.O.; Monotonie: mit $a_n = 2^n, N_n = 2^{2n+1}$

$$\text{ist } A_n = \frac{2a_n}{N_n} = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und Stufenmengen von s_{n+1} liegen innerhalb der Stufenmengen von s_n
 $\Rightarrow s_n(x) \geq s_{n+1}(x)$ für alle $x \in X$ □