

Kapitel 17 Integration

Definition 17.1. Sei (X, A, μ) ein Maßraum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

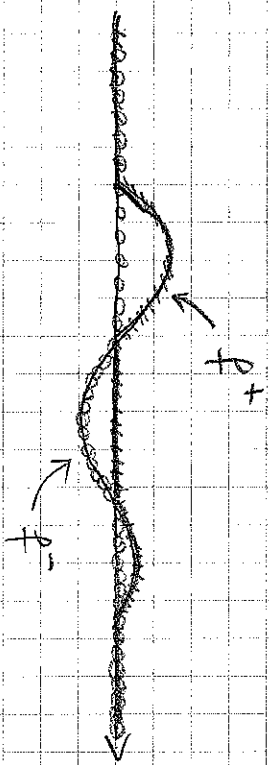
Für $f \geq 0$ ist $\int f(x) \mu(dx) = \sup \left\{ \int s(x) \mu(dx) \mid s: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion mit } 0 \leq s \leq f \right\}$

$$\begin{aligned} \text{Beispiel 1) } \mu = \delta_{\bar{x}} \quad \int s(x) \delta_{\bar{x}}(dx) &= \sum_{i=1}^n s_i \underbrace{\delta_{\bar{x}}(A_i)}_{= \mathbb{1}_{A_i}(\bar{x})} = \sum_{i=1}^n s_i \mathbb{1}_{A_i}(\bar{x}) = s(\bar{x}) \\ &= \mathbb{1}_{A_i}(\bar{x}) \end{aligned}$$

$$\text{also } \int f(x) \delta_{\bar{x}}(dx) = \sup \left\{ s(\bar{x}) \mid 0 \leq s \leq f \right\} \leq f(\bar{x})$$

mit $(s_n) \nearrow f$ aus Lemma 16.6 ist $f(\bar{x}) = \lim s_n(\bar{x})$ also $\sup \left\{ s(\bar{x}) \mid 0 \leq s \leq f \right\} \geq f(\bar{x})$
d.h. insbesondere $s_n \leq f$!

$$\text{d.h. } \int f(x) \delta_{\bar{x}}(dx) = f(\bar{x})$$



bei Funktionen mit beliebigem Vorzeichen: Zerlege $f = f^+ - f^-$

$\underbrace{\max\{0, f\}}_{\text{messbar}} \geq 0$

$-\underbrace{\min\{0, f\}}_{\text{messbar}} \geq 0$

nutze Def 19.1 für beide Anteile

Definition 19.2: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

Dann ist $\int f(x) \mu(dx) := \int f^+(x) \mu(dx) - \int f^-(x) \mu(dx)$ sofern nicht beide Integrale $+\infty$ sind.

sind sogar beide Integrale endlich so heißt f μ -integrabel bzw. Lebesgue-integrierbar.

Symbol: $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ bzw. $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ bzw. $f \in \mathcal{L}^1(X)$ (wenn μ klar ist).

Im Fall $X = \mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda^n$ schreibt man auch $\int f(x) dx$ statt $\int f(x) \lambda^n(dx)$.

Für $A \in \mathcal{A}$ definiert man $\int_A f(x) \mu(dx) := \int \mathbb{1}_A(x) f(x) \mu(dx)$.