Name: ____________________ Matr.–Nr.: ____________________

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Sei $f(x) = \frac{x}{x-1}$ für $x \neq 1$.

(i) Beweisen Sie die Stetigkeit von f mit der ϵ-δ Charakterisierung.

(ii) Prüfen Sie nach, of f gleichmäßig stetig ist.

(i) $$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1}\right| = \frac{|x(y-1)-y(x-1)|}{|(x-1)(y-1)|}$$

$$= \frac{|y-x|}{|x-1|\,|y-1|} \quad (*)$$

Nachweis der Stetigkeit in $y \neq 1$

Beobachtung: $|x-y| < \frac{|y-1|}{2}$

$$\Rightarrow |y-1| \leq |x-y| + |x-1| < \frac{|y-1|}{2} + |x-1|$$

$$\Rightarrow |x-1| \geq \frac{|y-1|}{2}$$

also: $\frac{1}{|x-1|} \leq \frac{2}{|y-1|}$ falls $|x-y| < \frac{|y-1|}{2}$

Sei $\varepsilon > 0$ Wähle $\delta = \min\left\{\frac{|y-1|}{2}, \frac{\varepsilon|y-1|^2}{2}\right\}$

falls $|x-y| < \delta$ dann (mit $(*)$)

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{2|y-x|}{|y-1|^2} < \varepsilon$$

(ii) Ann: f glm stetig

$\Rightarrow$ (x_n) Cauchy-Folge $\Rightarrow$ $(f(x_n))$ Cauchy Folge

$\Rightarrow$ $(f(x_n))$ beschränkt

wähle $x_n = 1 + 1/n$

$\Rightarrow$ $f(x_n) = n+1$ unbeschränkt $\lightning$

Name: ______________________ **Matr.–Nr.:** ______________________

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien beliebig oft differenzierbar, wobei die k-ten Ableitungen mit $f^{(k)}$ bzw. $g^{(k)}$ bezeichnet werden. Beweisen Sie die Leibnizregel für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$(1) \qquad (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Hinweis: Benutzen Sie den in der Übung bewiesenen Zusammenhang

$$(2) \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \qquad 1 \le k \le n.$$

Beweis durch Induktion:

$n = 1$: $(f \cdot g)' = f'g + fg' = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)}$ ✓

Ann: Beh. (1) richtig für n.

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = \left[(f \cdot g)^{(n)}\right]' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n+1-(k+1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \ldots$$

Aufgabe 2: (Fortsetzung)

$$= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

Name: ______________________________ Matr.-Nr.: ______________________________

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Beweisen Sie: Eine Folge (a_n) reeller Zahlen ist genau dann beschränkt, wenn jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge enthält.

a) Sei (a_n) beschränkt
und (a_{n_k}) Teilfolge (TF)
Bolzano Weierstraß $\Rightarrow$ (a_{n_k}) hat beschränkte TF
(~~da~~ sogar konvergente TF!)

b) Sei (a_n) eine Folge so dass jede TF eine beschränkte TF hat.
Ann: (a_n) unbeschränkt
$\Rightarrow \exists\, n_1 : \quad |a_{n_1}| > 1$

Seien $\quad n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ konstruiert mit
$$|a_{n_k}| > k$$
da (a_n) unbeschränkt $\exists\, n_{k+1} > n_k \quad |a_{n_{k+1}}| > k+1$

$\Rightarrow \exists$ TF (a_{n_k}) mit $|a_{n_k}| > k \quad \forall k$

$\Rightarrow (a_{n_k})$ hat keine konvergente TF $\lightning$

Name: ______________________________ Matr.–Nr.: ______________________________

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Geben Sie lim inf und lim sup der Folgen an (mit kurzer Begründung)

$$\frac{n^n}{n!}, \qquad \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}, \qquad (-1)^n\sqrt[n]{n}+\frac{1}{n}\ln n.$$

Beschreiben Sie die Folge

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}},\ \ldots$$

rekursiv und berechnen Sie den Grenzwert unter der Annahme, dass die Folge gegen eine positive Zahl konvergiert.

(i) $\frac{n^n}{n!} = \prod_{i=1}^{n} \frac{n}{i} \geq n \quad \forall n$

$\Rightarrow \frac{n^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow \liminf \frac{n^n}{n!} = \limsup \frac{n^n}{n!} = \infty$

(ii) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}} = \frac{n+\sqrt{n} - (n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{2} = 1$

also $\liminf a_n = \lim a_n = \limsup a_n = 1$

(iii) $\frac{1}{n}\ln n = \ln \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ da $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$
und $\ln 1 = 0$
und $\ln$ stetig

da $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

gilt $\limsup (-1)^n \sqrt[n]{n} = +1$

$\liminf (-1)^n \sqrt[n]{n} = -1$

also: $\liminf\left((-1)^n\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n}\ln n\right) = -1 \quad \limsup(\cdots) = +1$

Name: ____________________ Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 4: (Fortsetzung)

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$$

Sei $a = \lim a_n > 0$

$$\Rightarrow \quad a = \lim a_n = \lim \sqrt{1 + a_n} = \sqrt{1 + \lim a_n} = \sqrt{1 + a}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = 1 + a$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Name: ____________________ Matr.–Nr.: ____________________

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Sei $f(x) = x + x^5$ mit $x \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie die Menge $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ (Beweis!).

(ii) Zeigen Sie, dass f invertierbar ist

(iii) An welchen Punkten ist die Umkehrabbildung g differenzierbar?

(iv) Berechnen Sie $g(0), g'(0), g''(0)$.

(i) Sei $y \in \mathbb{R} \Rightarrow -|y| \leq y \leq |y|$

$$\Rightarrow \underbrace{-|y| + (-|y|)^5}_{= f(-|y|)} \leq y \leq \underbrace{|y| + |y|^5}_{= f(|y|)}$$

Zwischenwertsatz auf $[-|y|, |y|]$ $\Longrightarrow$ $\exists\, x \in [-|y|, |y|] : f(x) = y$

mit f stetig (Polynom)

also $\{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$

(ii) $f'(x) = 1 + 5x^4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ f invertierbar

(iii) da $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ist $g = f^{-1}$ an allen Punkten $y \in \mathbb{R}$ differenzierbar

(iv) da $f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

$g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$ also $g'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$

$g''(y) = -\dfrac{1}{(f'(g(y)))^2} f''(g(y))\, g'(y) = \dfrac{-f''(g(y))}{[f'(g(y))]^3}$ also $g''(0) = 0$

da $f''(x) = 20x^3$

Name: ____________________ Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 6: (8 Punkte)

Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist die Funktionenfolge

$$f_n(x) = n\hat{f}\left(n\left(x - \frac{1}{n}\right)\right), \qquad \text{mit} \qquad \hat{f}(x) = \max(1 - |x|, 0), \quad x \in \mathbb{R}$$

gegeben.

(i) Skizzieren Sie $\hat{f}$ sowie einige Folgenglieder f_n und bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

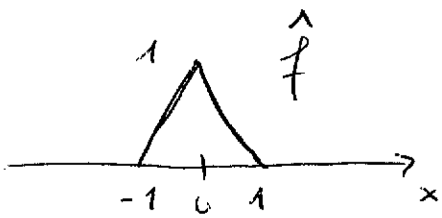
(ii) Beweisen Sie, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist.

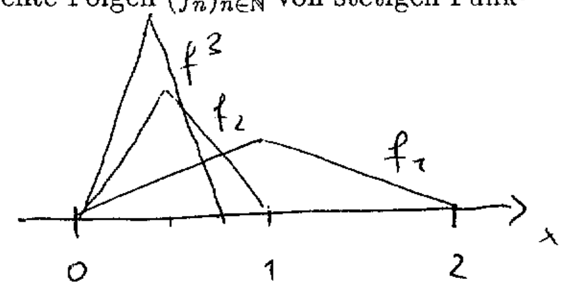
(iii) Berechnen Sie das Integral des n-ten Folgengliedes und zeigen Sie, dass die Beziehung (3) *nicht* gilt.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \tag{3}$$

(iv) Beweisen Sie (3) für *gleichmäßig* konvergente Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen.

(i)





klar: $f_n(0) = 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad \lim f_n(x) = 0$ für $x = 0$

Sei $x \neq 0$ dann $f_n(x) = 0 \quad \forall n > N$ mit $N = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow \lim f_n(x) = 0$ also $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = f$ punktweise

(ii) $\sup\limits_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(\tfrac{1}{n})| = 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ keine gleichmäßige Konvergenz

(iii) Mit Substitutionsregel $\int_0^2 \hat{f}(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(0)}^{u(2)} \hat{f}(s)\,ds$

wobei $u(x) = nx - 1$, $u'(x) = n$, $u(0) = -1$, $u(2) = 2n - 1 > 1$

$\int_0^2 f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{2n-1} \hat{f}(s)\,ds = \int_{-1}^{+1} \hat{f}(s)\,ds = \underline{1}$ (Fläche des Dreiecks)

da $\hat{f} = 0$ für $x > 1$

Name: ______________________ Matr.–Nr.: ______________________

Aufgabe 6: (Fortsetzung)

mit $\lim f_n = f = 0$ punktweise gilt also

$$1 = \lim \int_0^2 f_n(x)\,dx \neq \int_0^2 \lim f_n(x)\,dx = \int_0^2 0\,dx = 0$$

(iv) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ glm. konvergente Folge von stetigen Funktionen auf $[0,2]$

$\Rightarrow$ $f = \lim f_n$ ist stetig auf $[0,2]$

$\Rightarrow$ f ist integrierbar auf $[0,2]$

$$\left| \int_0^2 f_n\,dx - \int_0^2 f\,dx \right| = \left| \int_0^2 f_n(x) - f(x)\,dx \right|$$

$$\leq \int_0^2 |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$\leq \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| \int_0^2 1\,dx$$

$$\downarrow \; n \to \infty$$

$$0$$

Name: ______________________ Matr.–Nr.: ______________________

Aufgabe 7: (8 Punkte)

Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt *hölderstetig* zum Exponent $\alpha > 0$, oder kurz *α-stetig*, falls eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \le K|x-y|^\alpha, \qquad \forall x, y \in [0,1].$$

Zeigen Sie:

(i) Hölderstetigkeit impliziert Stetigkeit.

(ii) Ist f hölderstetig zum Exponent $\alpha > 1$, so ist f konstant.

(iii) Durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}x & 0 \le x \le 1/n \\ \sqrt{x} & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

wird eine Folge 1-stetiger Funktionen definiert, die gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen eine Grenzfunktion konvergiert, die *nicht* 1-stetig ist.

(iv) Überlegen Sie sich eine sinnvolle Definition von *gleichmäßig α-stetigen Funktionenfolgen*, so dass folgender Satz gilt: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig α-stetige Funktionenfolge auf $[0,1]$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist f ebenfalls α-stetig (Definition und Beweis).

(i) Sei $\bar{x} \in [0,1]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $[0,1]$ mit $x_n \to \bar{x}$

$|f(x_n) - f(\bar{x})| \le K\,|x_n - \bar{x}|^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ da $|\cdot|^\alpha$ stetig

$\Rightarrow$ f stetig

(ii) sei $x \neq \underset{\in(0,1)}{\bar{x}}$ $\quad \dfrac{|f(x) - f(\bar{x})|}{|x-\bar{x}|} \le K\,|x-\bar{x}|^{\alpha-1} \xrightarrow[x\to\bar{x}]{} 0$

$\to$ f differenzierbar in $\bar{x}$ und $f'(\bar{x}) = 0$

$\to$ f konstant in $[0,1]$

(iii) für $x, y \ge 1/n$ gilt $|f_n(x) - f_n(y)| = |f'(z)|\,|x-y|$

mit z zwischen x und y (Mittelwertsatz)

da $f'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}} \le \dfrac{\sqrt{n}}{2}$ gilt

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le \frac{\sqrt{n}}{2}\,|x-y|^1$$

Name: ____________________ Matr.–Nr.: ____________________

Aufgabe 7: (Fortsetzung)

Sei $x < \frac{1}{n}$, $y \in [0,1]$ $y > x$

dann gilt $\sqrt{y} \le \sqrt{n}\, y$ falls $y \ge 1/n$

also $f_n(y) \le \sqrt{n}\, y$

$$|f_n(y) - f_n(x)| = f_n(y) - f_n(x) = \sqrt{n}\,(y-x) = \sqrt{n}\,|y-x|^1$$

insgesamt: $\quad |f_n(x) - f_n(y)| \le \underset{K}{\sqrt{n}}\ |x-y|^{\overset{\alpha}{1}}$

wegen $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - \sqrt{x}| = \sup\limits_{0\le x\le 1/n} |\sqrt{n}\,x - \sqrt{x}| \le \sup\limits_{0\le x\le 1/n} |\sqrt{n}\,x| + \sup\limits_{0<x\le 1/n} \sqrt{x}$

$$\le \sqrt{n}\,\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ gleichmäßig mit $f(x) = \sqrt{x}$

aber $\quad |f(x) - f(0)| = |\sqrt{x}| \le K\,|x|^1 \quad \forall x \in [0,1]$

Ann.:
f 1-stetig $\quad \Rightarrow \quad K \ge \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall\, x \in (0,1]$

$\Rightarrow \quad K \ge n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\text{mit } x_n = \frac{1}{n^2}\right)$

also f nicht 1-stetig. $\lightning$

Definition: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von α-stetigen Funktionen f_n heißt gleichmäßig α-stetig, falls ein (von n unabhängiges) $K>0$ existiert, so dass

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le K|x-y|^\alpha \quad \forall x,y\in[0,1]$$

Ann: $f_n \to f$ glm und (f_n) glm α-stetig

$$|f(x) - f(y)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

$$\le 2\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| + K|x-y|^\alpha$$

Sei $\varepsilon > 0$ $\exists N$: $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall n > N$

wähle $n > N$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \le K|x-y|^\alpha + \varepsilon$$

da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow$ $|f(x) - f(y)| \le K|x-y|^\alpha$