Prof. Dr. H. Neunzert SS 2002-1
HDoz. Dr. M. Junk

Übung *Analysis II*

Rückgabe: 12:00, Freitag 26.04.

Hinweis: Gruppen der Größe $G \in \{1, 2, 3\}$ können ein gemeinsames Lösungsblatt abgeben, wobei die Gruppenzusammensetzung während des Semesters gleich bleiben sollte. Die Abgabe erfolgt in den Metallkästen neben dem Hörsaal 48/210 im Fach Ihres Übungsgruppenleiters. Die Übungsblätter finden Sie auch auf der Homepage: `http://www.mathematik.uni-kl.de/~junk/analysis/analysis2.html`

Aufgabe 1:

Sei X ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in A$ auch die Verbindungsstrecke $\{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0,1]\}$ in A liegt. Zeigen Sie:

(i) Intervalle sind konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(ii) Lineare Unterräume von X sind konvex.

(iii) Halbräume in $\mathbb{R}^n$ sind konvex.

(iv) Ist X ein normierter Raum, so ist die Einheitskugel $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ konvex.

(v) $A \subset X$ ist konvex $\Leftrightarrow$ für alle endlichen Teilmengen $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$ und beliebige Gewichte $p_1, \ldots, p_n \geq 0$, mit der Eigenschaft $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, auch die *Konvexkombination* $x = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ in A liegt (Induktion!).

Aufgabe 2:

Sei X ein reeller Vektorraum und sei $A \subset X$ konvex. Eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls der *Epigraph* $\operatorname{epi} f = \{(x, r) : x \in A, r \geq f(x)\}$ eine konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie:

(i) $f : A \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda \in [0,1]$ die Ungleichung $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ erfüllt ist.

(ii) $f : A \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn für alle $x, y \in A$ die Funktion $g(\lambda) = f((1-\lambda)x + \lambda y)$ konvex auf $[0,1]$ ist.

(iii) Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvex und für $x \neq y$ sei $d_g(x,y) = (g(x) - g(y))/(x-y)$. Dann gilt mit $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1$, dass $d_g(x_1, x_2) \leq d_g(x_1, x_3) \leq d_g(x_2, x_3)$.

(iv) Ist $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $(0,1)$ und konvex, so ist g' monoton wachsend. Tip: (iii) benutzen.

(v) Ist $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $(0,1)$ und g' monoton wachsend, so ist g konvex. Tip: Widerspruchsbeweis.

(vi) Ist $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar auf $(0,1)$, so ist g genau dann konvex wenn $g''(x) \geq 0$ für alle $x \in (0,1)$.

(vii) Die Funktionen $x \mapsto x^p$ sind konvex auf $(0, \infty)$ für alle $p \geq 1$. Tip: (ii)+(vi).

-bitte wenden-

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ reell und für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{bzw.} \qquad \|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|.$$

(i) Zeichnen Sie die Einheitskugeln $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ für $p = 1, 3/2, 2, 4, 100, \infty$.

(ii) Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ für alle $p \in [1, \infty]$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist. Tip zur Dreiecksungleichung: Zeigen Sie zunächst, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ konvex ist und benutzen Sie dann die Beziehung (für $x, y \neq 0$)

$$\frac{\|x+y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} = \left\| \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \frac{x}{\|x\|_p} + \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \frac{y}{\|y\|_p} \right\|$$

(iii) Zeigen Sie die Normäquivalenz $c_p\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq C_p\|x\|_\infty$ mit möglichst genauen Konstanten c_p, C_p.

(iv) Zeigen Sie, dass alle Normen $\|\cdot\|_p$ untereinander äquivalent sind, d.h.

$$c_{pq}\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq C_{pq}\|x\|_q.$$

(v) Zeigen Sie $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.