Prof. Dr. H. Neunzert
HDoz. Dr. M. Junk

SS 2002-10

Übung *Analysis II*

Rückgabe: 12:00, Freitag 05.07.

Aufgabe 28:

Durch die lineare invertierbare Abbildung $\phi^{-1} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\phi^{-1}(c) = \begin{pmatrix} c_1 & c_{n+1} & \cdots & c_{n^2-n+1} \\ c_2 & c_{n+2} & \cdots & c_{n^2-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{2n} & \cdots & c_{n^2} \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}^{n^2}$$

können wir $n \times n$ Matrizen mit Vektoren identifizieren. Mit $O(n)$ bezeichnen wir die orthogonale Gruppe in $\mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. die Matrizen, für die gilt $AA^T = I$.

(i) Zeigen Sie, dass $\phi(O(n))$ eine reguläre Fläche im R^{n^2} darstellt und bestimmen Sie die Dimension von $\phi(O(n))$.

(ii) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum von $\phi(O(n))$ genau aus den schiefsymmetrischen Matrizen besteht (A ist schiefsymmetrisch, wenn $A^T = -A$).

(iii) Sei $SO(n) \subset O(n)$ die Menge der Rotationsmatrizen. Zeigen Sie, dass $\phi(SO(n))$ eine relativ offene, zusammenhängende Teilmenge von $\phi(O(n))$ in der Relativtopologie ist. Zur Erinnerung: sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Dann ist $B \subset \Omega$ relativ offen in Ω, wenn eine offene Menge $B' \subset \mathbb{R}^m$ existiert, so dass $B' \cap \Omega = B$ gilt.

(iv) Geben Sie Parametrisierungen von $\phi(SO(2))$ und $\phi(SO(3))$ an. Welche Dimensionen haben $\phi(SO(2))$ und $\phi(SO(3))$?

(v) Im Fall $n = 3$ besteht ein Zusammenhang zwischen Rotationen und dem Kreuzprodukt: Zeigen Sie, dass für jede schiefsymmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ein Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ existiert, so dass $Ay = a \times y$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$. Wieso approximiert die Iteration $y^{(n+1)} = y^{(n)} + \epsilon a \times y^{(n)}$ für kleines ϵ eine Rotationsbewegung?

Aufgabe 29:

Berechnen Sie die minimale (euklidische) Distanz zwischen dem Punkt $0 \neq (c, 0) \in \mathbb{R}^2$ und der Parabel $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ mit Hilfe der Lagrange Multiplikatoren. Zeichnen Sie die Isolinien der zu minimierenden Funktion und die Kurve der Nebenbedingung. Zeigen Sie, dass die Verbindungslinie zwischen dem Punkt $(c, 0)$ und dem nächsten Punkt auf der Parabel, die Parabel senkrecht durchschneidet.

-bitte wenden-

Aufgabe 30:

Für eine Rinne mit Trapez-Querschnitt (siehe Skizze) gebe man den Zusammenhang $f(h, \alpha, A, U) = 0$ für die Höhe h, den Neigungswinkel α, den Querschnittsinhalt A und U gemäß Skizze. Man löse damit für

$$0 \leq h \leq \frac{U}{2} \sin \alpha, \qquad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

die Optimierungsaufgaben:

(i) Maximaler Inhalt A bei vorgegebenem Umfang $U = U_0$!

(ii) Minimaler Materialaufwand U bei festem Inhalt $A = A_0$!