Prof. Dr. H. Neunzert
HDoz. Dr. M. Junk

Übung *Analysis II*

Rückgabe: 12:00, Freitag 12.07.

Aufgabe 31:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Bestimmen Sie **alle** Eigenwerte und eine Basis aus Eigenvektoren von A durch Maximierung von $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ unter geeigneten Nebenbedingungen.

Aufgabe 32:

Sei γ eine Kurve der Klasse C^1. Zeigen Sie, dass die Multiplizität jedes Punktes von γ endlich ist.

Aufgabe 33:

Betrachten Sie die Kurven mit den Parameterdarstellungen ($T > 0$)

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad z(t) = \frac{1}{t+1} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T].$$

(i) Skizzieren Sie die Kurven.

(ii) Haben die Kurven eine endliche Länge für $T \to \infty$?

(iii) Geben Sie die Standarddarstellung der x-Kurve an.

Aufgabe 34:

Sei $x : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ die Standarddarstellung einer C^1 Kurve. Zeigen Sie, dass $\ddot{x}(s)$ stets senkrecht auf dem Tangentenvektor $T(s) = \dot{x}(s)$ steht. Überlegen Sie, welche geometrische Information die Größe $\kappa(s) = \|\ddot{x}(s)\|$ beinhaltet. An Punkten $s \in [0, L]$, wo $\ddot{x}(s) \neq 0$ gilt, kann man die Vektoren

$$N(s) = \frac{\ddot{x}(s)}{\|\ddot{x}(s)\|}, \qquad B(s) = T(s) \times N(s)$$

definieren (N heißt Hauptnormalenvektor, B heißt Binormalenvektor). Zeigen Sie, dass eine Funktion $\tau : [0, L] \to \mathbb{R}$ existiert, so dass die Beziehung $\dot{N} = -\kappa T + \tau B$ gilt. Welche geometrische Bedeutung hat τ? Berechnen Sie alle auftretenden Größen für die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$z(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, T].$$

Spaß an Kurven und Flächen? → Proseminar Differentialgeometrie!