Prof. Dr. H. Neunzert
HDoz. Dr. M. Junk SS 2002-2

Übung *Analysis II*

Rückgabe: 12:00, Freitag 03.05.

Aufgabe 4:

Es sei M eine nichtleere Menge und für alle $x, y \in M$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}.$$

(i) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf M ist (die sogenannte *diskrete Metrik*).

(ii) Zeigen Sie, dass jede Teilmenge von M sowohl offen als auch abgeschlossen ist (bezüglich d).

(iii) Beweisen Sie: ist $(\tilde{M}, \tilde{d})$ ein weiterer metrischer Raum, so ist jede Abbildung $f : M \to \tilde{M}$ stetig.

Aufgabe 5:

Auf $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x,y) = 3y(x^2 + y^2) - 4y^3$ gegeben.

(i) Stellen Sie die Funktion als Fläche im $\mathbb{R}^3$ dar (in einer sinnvollen Umgebung des Nullpunktes). Benutzen Sie dazu ein Plotprogramm Ihrer Wahl.

(ii) Bestimmen Sie Gleichungen für die Niveaulinien und zeichnen Sie eine sinnvolle Anzahl von Höhenlinien so in ein zweidimensionales Diagramm ein, dass man auf die Form der Fläche zurückschließen kann.

(iii) Konstruieren Sie selbst eine "interessante Funktion" $g(x,y)$ und stellen Sie sie als Fläche und durch Höhenlinien dar (für die schönste Funktion gibt's ein '*').

Aufgabe 6:

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq E \subset M$. Der Abstand von $x \in M$ zur Menge E definiert eine Abbildung $\rho_E(x) = \inf\{d(x,y) : y \in E\}$ auf M. Zeigen Sie

(i) Die Abbildung ρ_E ist auf M gleichmäßig stetig.

(ii) Die Menge $\{x \in M : \rho_E(x) = 0\}$ ist der Abschluss von E.

Aufgabe 7:

Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und $K \subset M_1$ kompakt.

(i) Zeigen Sie: ist $f : M_1 \to M_2$ stetig, so ist $f(K)$ kompakt in M_2.

(ii) Folgern Sie im Fall $M_2 = \mathbb{R}$ mit der Betragsmetrik, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ein Maximum und ein Minimum besitzen.