Prof. Dr. H. Neunzert
HDoz. Dr. M. Junk

SS 2002-3

Übung ***Analysis II***

Rückgabe: 12:00, Freitag 10.05.

Aufgabe 8:

(i) Für welche Werte von α gilt $f(x) = O(|x|^\alpha)$ für $x \to 0$ und für welche Werte ist $f(x) = o(|x|^\alpha)$ für $x \to 0$?

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}, \qquad f(x) = x\sin(x), \qquad f(x) = (1-e^x)^{-1},$$
$$f(x) = \ln(1+x), \qquad f(x) = x\ln(x), \qquad f(x) = \sin(1/x).$$

(ii) Sei $h_\epsilon(x) = x + \exp(-x/\epsilon)$ für $x \in (0,1)$. Zeigen Sie: für alle $x \in (0,1)$ gilt $h_\epsilon(x) = x + O(\epsilon)$ für $\epsilon \searrow 0$, aber $\sup_{x\in(0,1)} |h_\epsilon(x) - x| = O(1)$ für $\epsilon \searrow 0$.

(iii) Sei $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \xi$. Zeigen Sie, dass dann auch $f(x) = O(g(x))$. Begründen Sie, warum die Umkehrung dieser Aussage nicht richtig ist.

Aufgabe 9:

Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Beantworten Sie für f und $g = f^2$ jeweils folgende Fragen:

(i) Ist die Funktion stetig?

(ii) Wie lauten die partiellen Ableitungen nach x und y?

(iii) Sind die partiellen Ableitungen stetig?

(iv) Ist die Funktion differenzierbar?

Aufgabe 10:

Man zeige durch Einsetzen: die auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ definierte Funktion

$$F(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{4t}\right)$$

ist eine Lösung der Diffusionsgleichung (bzw. Wärmeleitungsgleichung)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F, \qquad \text{wobei} \qquad \Delta F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right).$$