Prof. Dr. H. Neunzert
HDoz. Dr. M. Junk

SS 2002-4

Übung *Analysis II*

Rückgabe: 12:00, Freitag 17.05.

Aufgabe 11:

Im $\mathbb{R}^2$ berechnet sich der euklidische Abstand eines Punktes (x, y) zum Ursprung durch $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sei nun $f = r^2 \sin(1/r)$ für $(x, y) \neq 0$ und $f(0, 0) = 0$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ zwar differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 12:

Auf $\mathbb{R}^2$ sei folgende Funktion gegeben

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Überprüfen Sie, ob $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ gilt.

Aufgabe 13:

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix und sei

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} x_i x_j, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Leiten Sie explizite (d.h. nach x_1 oder x_2 aufgelöste) Gleichungen für die Höhenlinien der Funktion f her und skizzieren Sie die Höhenlinien. Unterscheiden Sie dabei die Fälle (a) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, (b) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ und (c) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ für die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A. Tipp: Gehen Sie zunächst zu einem günstigen Koordinatensystem über.

Aufgabe 14:

Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die kleinste "Schachtel" $\{x \in \mathbb{R}^3 : a \leq x_3 \leq b\}$ in die die Niveaumenge $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 1\}$ hineinpasst (Tipp: die Schachtelwände sind Tangentialebenen). Welche Form hat die Menge E?