Prof. Dr. H. Neunzert
HDoz. Dr. M. Junk

Übung *Analysis II*

Rückgabe: 12:00, Freitag 31.05.

Aufgabe 15:

Zeigen Sie, dass das Polynom $f(x,y) = (x^2+y^2)(x^2-3x+y^2)+2x^2$ in $(0,0)$ *kein* Minimum besitzt obwohl f entlang *jeder* Geraden durch den Ursprung dort ein Minimum hat.

Aufgabe 16:

Sei $\mathcal{I} = \{1,\dots,n\}$ und e_i seien die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^n$. Weiter sei die Abbildung $I^q : \mathcal{I}^q \to \mathbb{N}_0^n$ definiert durch $I^q(\lambda) = \sum_{i=1}^q e_{\lambda_i}$, d.h. $I_k^q(\lambda)$ ist die Anzahl der Komponenten in λ, die gleich $k \in \mathcal{I}$ sind. Eine Abbildung $g : \mathcal{I}^q \to \mathbb{R}$ wird *symmetrisch* genannt, wenn $g(\lambda) = g(P\lambda)$ für jede Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{q\times q}$.

(i) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in $\mathcal{I}^q$.

(ii) Sei $\lambda \in \mathcal{I}^q$. Zeigen Sie, dass $\alpha = I^q(\lambda)$ die Länge q hat: $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = q$.

(iii) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge $\{\lambda \in \mathcal{I}^{|\alpha|} : I^{|\alpha|}(\lambda) = \alpha\}$ für einen gegebenen Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

(iv) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge $\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = q\}$.

(v) Zeigen Sie, dass $g : \mathcal{I}^q \to \mathbb{R}$ genau dann symmetrisch ist, wenn eine Funktion $g_s : \{\alpha : |\alpha| = q\} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $g_s(I^q(\lambda)) = g(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathcal{I}^q$.

(vi) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $f \in C^{(q)}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass die auf $\mathcal{I}^q$ gegebenen Funktionen $\lambda \mapsto x_{\lambda_1}\cdots x_{\lambda_q}$ und $\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial x_{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{\lambda_q}} f(x)$ symmetrisch sind. Wie lauten die zugehörigen Funktionen auf $\{\alpha : |\alpha| = q\}$?

(vii) Sei $g : \mathcal{I}^q \to \mathbb{R}$ symmetrisch. Zeigen Sie

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{I}^q} g(\lambda) = \sum_{|\alpha|=q} \frac{q!}{\alpha!} g_s(\alpha), \qquad \alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!.$$

(viii) Beweisen Sie:

$$(x_1+\cdots+x_n)^q = \sum_{\lambda\in\mathcal{I}^q} x_{\lambda_1}\cdots x_{\lambda_q} \qquad \text{und} \qquad \left|\sum_{|\alpha|=q} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\right| \le n^{\frac{q}{2}} \frac{\|x\|^q}{q!},$$

wobei $\|x\|$ die Euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ ist und $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$.

Bitte keine "$\cdots$" Beweise auch wenn die Aussagen "$\cdots$" enthalten.

Aufgabe 17:

Man entwickle nach der Taylorformel bis zur zweiten Potenz von x, y:

(i) $f(x,y) = x^2\sin(xy/2)$ um $(1,\pi)$,

(ii) $f(x,y) = (x^2-2y^2)(4+xy)^{-1/2}$ um $(0,0)$,

(iii) $f(x,y) = x^2 - \cos(x/y)$ um $(\pi,1)$.