Prof. Dr. H. Neunzert
HDoz. Dr. M. Junk

SS 2002-6

# Übung *Analysis II*

Rückgabe: 12:00, Freitag 07.06.

**Aufgabe 18:**

Für die Funktionen auf $\mathbb{R}^2$

$$f_1(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2, \qquad f_2(x,y) = xy(x-1),$$
$$f_3(x,y) = \cos x \cosh y, \qquad f_4(x,y) = \sin(xy)$$

bestimme man die lokalen und globalen Extremstellen und die Sattelpunkte.

**Aufgabe 19:**

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Weiterhin sei $f$ stetig differenzierbar in $D \backslash \{\bar{x}\}$ für ein $\bar{x} \in D$. Zeigen Sie, dass $f$ überall stetig differenzierbar ist, falls die Grenzwerte $\lim_{x\to\bar{x}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ für $i = 1, \ldots, n$ existieren.

**Aufgabe 20:**

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Zur Erinnerung: eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ ist konvex, falls für alle $x, y \in K$ und jedes $\lambda \in [0,1]$ die Ungleichung $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ erfüllt ist. Gilt sogar für alle $x \neq y$ und $\lambda \in (0,1)$ die strikte Ungleichung $f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$, so heisst $f$ *strikt konvex.*
Sei nun $f \in C^{(2)}(K)$ und

$$Q(x,h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j, \qquad x \in K,\ h \in \mathbb{R}^n.$$

Beweisen Sie, dass $f$ genau dann konvex auf $K$ ist, wenn $h \mapsto Q(x,h)$ für jedes $x$ nicht negativ ist (d.h. falls die Hessematrix $H[f](x)$ in jedem Punkt $x$ positiv semidefinit ist). Zeigen Sie, dass die Aussage auch gilt, wenn man konvex durch strikt konvex und semidefinit durch definit ersetzt.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2.

**Aufgabe 21:**

Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Funktion $g(s,t) = (t\cos 2\pi s)e_1 + (t \sin 2\pi s)e_2 + (1-t)e_3$ mit Werten in $\mathbb{R}^3$ definiert ($e_1, e_2, e_3$ sind die kanonischen Basisvektoren).

(i) Welche Form hat $g(\mathbb{R}^2)$?

(ii) Wie sieht das Bild des Quadrates $\{(s,t) : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ aus?

(iii) Finden Sie die Urbilder der Mengen $\{e_3\}$ und $\{e_1\}$.