Prof. Dr. H. Neunzert
HDoz. Dr. M. Junk SS 2002-7

Übung *Analysis II*

Rückgabe: 12:00, Freitag 14.06.

Aufgabe 22:

Wie beschreibt man die Bewegung eines Körpers im Raum? Nehmen wir an, der Körper nimmt vor der Bewegung die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein und nach der Bewegung die Menge $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist die Bewegung vollständig durch die Funktion $\Phi : \Omega \to \Omega'$ beschrieben, die jedem Ausgangspunkt $x \in \Omega$ den Zielpunkt $\Phi(x) \in \Omega'$ zuordnet. Wenn sich bei der Bewegung die Abstände aller Punkte untereinander nicht ändern, so nennt man die Bewegung auch *Isometrie*:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|x - y\| \qquad \forall x, y \in \Omega.$$

Isometrien Φ auf $\mathbb{R}^n$ lassen sich vollständig charakterisieren:

Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Isometrie genau dann, wenn $\Phi(x) = Lx + a$ mit orthogonaler Matrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a \in \mathbb{R}^n$.

(i) Zeigen Sie, dass die affin lineare Abbildung $\Phi(x) = Lx + a$ eine Isometrie ist.

(ii) Beweisen Sie: ist Φ eine Isometrie, so auch $g(x) = \Phi(x) - \Phi(0)$.

(iii) Benutzen Sie die Eigenschaft $\langle x, y\rangle = (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2)/2$ der euklidischen Norm in $\mathbb{R}^n$, um nachzuweisen, dass g auch *Winkel erhaltend* ist, d.h. $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(iv) Zeigen Sie, dass $g(e_1), \dots, g(e_n)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bildet.

(v) Beweisen Sie $\langle g(ax + by) - ag(x) - bg(y), g(z)\rangle = 0$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(vi) Nutzen Sie (iv) und (v), um die Linearität von g zu folgern.

(vii) Definieren wir $Lx = g(x)$, dann ist L eine orthogonale Matrix. Wieso?

(viii) Ist damit der Beweis der Charakterisierung von Isometrien komplett?

(ix) Können Sie durch Modifikation des Beweises eine ähnliche Aussage über Isometrien $\Phi : \Omega \to \Omega'$ mit $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ machen? Welche Voraussetzungen an Ω sind nötig?

(x) Ein *starrer Körper* ist dadurch definiert, dass die Punkte des Körpers ihre relative Lage stets beibehalten. Damit sind Starrkörperbewegungen immer von der Form $Lx + a$ mit orthogonalem L. Was können Sie über $\det L$ bei einer Starrkörperbewegung aussagen?