Prof. Dr. H. Neunzert
HDoz. Dr. M. Junk

Übung *Analysis II*

Rückgabe: 12:00, Freitag 21.06.

Aufgabe 23:

Konstruieren Sie eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ so dass mit geeignetem $x, h \in \mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$f(x+h) - f(x) = df(x+\theta h)h$$

für *kein* $\theta \in [0,1]$ erfüllt ist.
Der Mittelwertsatz aus Analysis I lässt sich also nicht direkt auf vektorwertige Funktionen übertragen. Können Sie eine korrekte Verallgemeinerung des skalaren Mittelwertsatzes beweisen?

Aufgabe 24:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper, der eine leichte Deformation $\Phi : \Omega \to \Omega'$ erfährt. Untersuchen Sie, wie sich ein Dreieck mit Eckpunkten x_1, x_2, x_3 im Körper verformt:

(i) Berechnen Sie Winkel und Seitenlängen im Dreieck mit Eckpunkten x_1, x_2, x_3 bzw. x'_1, x'_2, x'_3, wobei $x'_i = \Phi(x_i)$. Bestimmen Sie außerdem den Normalenvektor zur Dreiecksfläche und den Flächeninhalt?

(ii) Betrachten Sie den Grenzfall $\epsilon \to 0$ eines sehr kleinen Dreiecks $x_2 = x_1 + \epsilon\xi$, $x_3 = x_1 + \epsilon\psi$ mit $\xi, \psi \in \mathbb{R}^3$. Wie lassen sich hier die geänderten Winkel, die *Streckfaktoren* entsprechender Seitenlängen, der Normalenvektor zur Dreiecksfläche und der Flächenänderungsfaktor berechen?

(iii) Wenden Sie Ihre allgemeinen Ergebnisse auf den folgenden Fall an:

$$\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - \frac{yz}{10} \\ y + \frac{xz}{10} \\ z + \frac{3y^2x - x^3}{20} \end{pmatrix}$$

mit $\xi = (1,0,0)$, $\psi = (0,1,0)$ und $x_1 = 0$ bzw. $x_1 = (0,1,0)$. Wie stark unterscheiden sich die untersuchten Größen zwischen Grenzfall und endlicher Dreiecksgröße bei $\epsilon = 1, 0.1, 0.01$?

Aufgabe 25:

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen die Voraussetzungen des Satzes über inverse Funktionen erfüllen. Falls möglich, geben Sie die inverse Abbildung an.

(i) $g(s,t) = (s+2t)e_1 + (s-t)e_2$, mit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$

(ii) $g(s,t) = (s^2 - s - 2)e_1 + 3te_2$, mit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$

(iii) $g(s,t) = (s^2 - t^2)e_1 + ste_2$, mit $(s,t) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$

(iv) $g(s,t) = \exp(s)\cos(t)e_1 + \exp(s)\sin(t)e_2$, mit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$

(v) $g(s,t) = (\ln(st)e_1 + 1/(s^2+t^2)e_2$, mit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $0 < t < s$