Prof. Dr. H. Neunzert
HDoz. Dr. M. Junk

SS 2002-9

Übung *Analysis II*

Rückgabe: 12:00, Freitag 28.06.

Aufgabe 26:

Zeigen Sie, dass die Gleichung $y^2 + xz + z^2 - e^{xz} = 1$ in einer Umgebung des Punktes $(x, y, z) = (0, -1, 1)$ in der Form $z = g(x, y)$ eindeutig auflösbar ist, und berechnen Sie die Taylorentwicklung von g um den Punkt $(0, -1)$ bis zu den Gliedern 2. Ordnung.

Aufgabe 27:

Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^p$ offen und sei $A(s) = (a_{ij}(s))_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $s \in \mathbb{R}^p$ eine parameterabhängige, symmetrische Matrix mit stetig differenzierbaren Koeffizienten. Wie hängen die Eigenwerte der Matrix $A(s)$ von s ab? Betrachten Sie einfache Eigenwerte im allgemeinen Fall und Eigenwerte von höherer Vielfachheit in einem selbstgewählten Spezialfall.

Aufgabe 28:

Die Zustandsgleichung eines idealen Gases ist eine implizite Relation zwische Druck p, Volumen V und Temperatur T (R ist die universelle Gaskonstante)

$$pV - RT = 0, \qquad p, V, T > 0.$$

Bestimmen sie die Auflösungen $p = X(V, T)$, $V = Y(p, T)$, $T = Z(p, V)$ und zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass

$$\frac{\partial X}{\partial V}\frac{\partial Y}{\partial T}\frac{\partial Z}{\partial p} = -1.$$

Zeigen Sie allgemeiner, dass für jede C^1 Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $P = (x, y, z)$ mit $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$ für die implizit erklärten Auflösungen $x = X(y, z)$, $z = Z(x, y)$, $y = Y(x, z)$ gilt

$$\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x} = -1.$$