Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

WS 2001/02-10

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 25.01.2002

Aufgabe 39:

Bestimmen Sie das genaue Konvergenzintervall folgender Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n+1+(-1)^n}$$

Geben Sie außerdem eine Potenzreihe mit dem Konvergenzintervall $(-2, 2]$ an.

Aufgabe 40:

Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sei $a_n = (\frac{4+2(-1)^n}{5})^n$.

(i) Bestimmen Sie $\limsup(a_n)^{1/n}$, $\liminf(a_n)^{1/n}$, $\limsup |a_{n+1}/a_n|$, $\liminf |a_{n+1}/a_n|$.

(ii) Konvergieren die Reihen $\sum a_n$ und $\sum(-1)^n a_n$?

(iii) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Potenzreihe $\sum a_n x^n$.

Aufgabe 41:

Benutzen Sie die Definitionen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

um den Zusammenhang $\sin(2x) = \sin(x)\cos(x)/2$ zu beweisen.

Aufgabe 42:

Sei $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie einige Folgenglieder f_n und beweisen Sie Ihre Vermutungen zu folgenden Fragen:

(i) Wie lautet der *punktweise Grenzwert* f der Folge (f_n)?

(ii) Konvergiert die Folge *gleichmäßig* auf $[0, 1]$?

(iii) Konvergiert die Folge *gleichmäßig* auf $[1, \infty)$?

Führen Sie die gleichen Überlegungen mit $f_n(x) = (x - 1/n)^2$, $x \in \mathbb{R}$ durch.