Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

WS 2001/02-11

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 01.02.2002

Aufgabe 43:

Benutzen Sie die Definition $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, um zu zeigen, dass $\exp(x) > 1$ für $x > 0$. Beweisen Sie dann mit der Beziehung $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, dass

(i) $\exp(x) < 1$ für $x < 0$,

(ii) exp streng monoton wachsend ist,

(iii) $\inf_{x\in\mathbb{R}} \exp(x) = 0$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} \exp(x) = \infty$.

Begründen Sie, dass exp invertierbar ist mit stetiger Umkehrfunktion (üblicher Name: ln). Zeigen Sie, dass die Beziehung $\ln(xy) = \ln x \ln y$ für $x, y > 0$ gilt.

Aufgabe 44:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Beziehung $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Außerdem sei $f(1) > 0$ und f sei in mindestens einem Punkt stetig.

(i) Zeigen Sie: f ist stetig auf $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Drücken Sie zunächst $f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$, dann $f(p)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, dann $f(1/q)$ für $q \in \mathbb{N}$ und schließlich $f(p/q)$ für $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ durch $f(1)$ aus.

(iii) Benutzen Sie Stetigkeit von f, um zu zeigen, dass $f(x) = \exp(x \ln f(1))$.

Übrigens: für $a > 0$ definiert man $a^x = \exp(x \ln a)$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 45:

Sei (g_n) eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $g_n : S \to \mathbb{R}$ mit Grenzwert $g : S \to \mathbb{R}$, wobei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$. Sei (x_n) eine Folge in S, die gegen $x \in S$ konvergiert. Zeigen sie: $g_n(x_n) \to g(x)$.

Aufgabe 46:

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum bestehend aus einem Vektorraum M und einer translationsinvarianten Metrik d (d.h. $d(x, y) = d(x - z, y - z)$ für alle $x, y, z \in M$). Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei eine Folge $(g_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben, die für $k \to \infty$ in M konvergiert. Außerdem gelte $d(g_{nk}, 0) \le b_n$ für alle k, n mit $\sum b_n < \infty$. Zeigen Sie:

(i) die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} g_{nk}$ konvergieren für jedes $k \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{nk}$ existiert und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{nk} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} g_{nk}.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $M = \mathbb{R}$ und $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$ als Richtschnur. Nutzen Sie die Translationsinvarianz, um zu zeigen, dass sich d praktisch genauso wie $d_{\mathbb{R}}$ verhält.