Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

WS 2001/02-12

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 08.02.2002

Aufgabe 47:

Zeigen Sie für $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ und ein beliebiges Polynom P, dass

$$\lim_{x\to\infty} P(x)/\exp(x) = 0.$$

Benutzen Sie die Definition der Ableitung zum Nachweis der Beziehung $\exp'(0) = 1$ und folgern Sie dann $\exp' = \exp$ unter Ausnutzung der Funktionalgleichung $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$. Sei nun $f(x) = \exp(-1/x)$ für $x > 0$. Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von f. Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist und dass alle Ableitungen die Struktur $P(1/x)f(x)$ haben, wobei P ein Polynom ist. Folgern Sie, dass die Funktionen

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \qquad \hat{f}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar sind. Skizzieren Sie $\bar{f}$ und $\hat{f}$.

Aufgabe 48:

Die Funktionen sin und cos seien durch die Potenzreihen gegeben (Aufgabe 41).

(i) Differenzieren Sie die Potenzreihen termweise und beweisen Sie damit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

(ii) Folgern Sie aus (i), dass die Funktion $x \mapsto \sin^2 x + \cos^2 x$ konstant auf $\mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie anschließend diese Konstante.

(iii) Sei $\pi/2 > 0$ die kleinste positive Nullstelle von cos. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

streng monoton wachsend ist und bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion arctan. Geben Sie auch das Definitionsgebiet von arctan an.

Aufgabe 49:

Sei f auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar und sei die Ableitung f' beschränkt. Zeigen Sie, dass f dann gleichmäßig stetig auf (a, b) ist.

Aufgabe 50:

Sei $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie: f ist differenzierbar und $f'(0) > 0$, aber f ist in *keinem* Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ streng monoton wachsend. Außerdem ist f' nicht stetig in $x = 0$.