Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

WS 2001/02-13

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 15.02.2002

Aufgabe 50:

Sei f differenzierbar auf $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ und $1 \leq f'(x) \leq 2$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $|x| \leq |f(x)| \leq 2|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 51:

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

Aufgabe 52:

Seien f, g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f' = g$ und $g' = f$, sowie $f(0) = 1, g(0) = 0$. Leiten Sie die Taylorreihen von f und g her und bestimmen Sie deren Konvergenzradius. Zeigen Sie, dass die Taylorreihen gegen f bzw. g konvergieren. Stellen Sie dann einen Zusammenhang zwischen den Potenzreihen von $f + g$ und $f - g$ und der Exponentialreihe her und drücken Sie f, g explizit durch die Exponentialfunktion aus.

Aufgabe 53:

Sei $f(x) = x$ für rationales x und $f(x) = 0$ für irrationales x. Berechnen Sie das obere und untere Darboux-Integral von f auf dem Intervall $[0, b]$. Ist f integrierbar auf $[0, b]$?