Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

WS 2001/02-1

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 09.11.

Hinweis: Gruppen der Größe $G \in \{1,2,3\}$ können ein gemeinsames Lösungsblatt abgeben, wobei die Gruppenzusammensetzung während des Semesters gleich bleiben sollte. Die Abgabe erfolgt in den Metallkästen neben dem Hörsaal 48/210 im Fach Ihres Übungsgruppenleiters. Informationen finden Sie auch auf der Homepage: `http://www.mathematik.uni-kl.de/~junk/analysis/analysis1.html`

Aufgabe 1:

Zeigen Sie unter Ausnutzung der Körperaxiome für $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $-0 = 0$,

(ii) $-(-x) = x$

(iii) $0x = 0$

(iv) $(-1)x = -x$

(v) $(-x)(-y) = xy$

(vi) $(-x)y = -(xy)$

(vii) $xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ or $y = 0$,

(viii) falls $a \neq 0$ dann hat $ax = y$ die eindeutige Lösung $x = a^{-1}y$,

(ix) $(x^{-1})^{-1} = x$ für $x \neq 0$.

Geben Sie dabei in jedem Umformungsschritt die benutzten Axiome (bzw. die Nummern von bereits gezeigten Ergebnissen) an.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie wie in Aufgabe 1 mit Körper- und Ordnungsaxiomen für $x, y, z \in \mathbb{R}$

(i) $x \leq y \Longrightarrow -y \leq -x$,

(ii) $x \leq y,\ z \leq 0 \Longrightarrow yz \leq xz$,

(iii) $0 \leq x,\ 0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq xy$,

(iv) $0 \leq xx = x^2$,

(v) $0 < 1$,

(vi) $0 < x \Longrightarrow 0 < x^{-1}$,

(vii) $0 < x < y \Longrightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Aufgabe 3:

Überlegen Sie sich eine Formel zur direkten Berechnung von $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie für jedes $b \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$, dass $(1+b)^n \geq 1 + nb$. (Bem.: x^n ist eine Abkürzung für das n-fache Produkt $x \cdots x$.)

Aufgabe 5:

Zeigen Sie, dass $11^n - 4^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar ist (ohne Rest).