Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk WS 2001/02-2

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 16.11.

Aufgabe 6:

Sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit endlich vielen Elementen. Zeigen Sie, dass A ein Maximum und ein Minimum besitzt.

Aufgabe 7:

Mit $n!$ (n Fakultät) bezeichnen wir für $n \in \mathbb{N}$ das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ und definieren $0! = 1$. Die *Binomialkoeffizienten* sind definiert für $n, k \in \mathbb{Z}$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie den Zusammenhang

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1}$$

und beweisen Sie mit (1), dass für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ der *binomische Satz* gilt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n. \tag{2}$$

Mit der abkürzenden Summenschreibweise $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ kann man (2) auch wie folgt schreiben

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Aufgabe 8:

Sei $A(n,k)$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen wobei $k, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$A(n,k) + A(n,k+1) = A(n+1,k+1).$$

Folgt daraus $A(n,k) = \binom{n}{k}$? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?

-bitte wenden-

Aufgabe 9:

Konstruieren Sie eine Menge von Aussagen P_n, $n \in \mathbb{N}$, für die der Induktionsschritt bewiesen werden kann (d.h. $P_n \Rightarrow P_{n+1}$), obwohl nicht alle Aussagen richtig sind (d.h. auf den Induktionsanfang kann man im Induktionsbeweis also nicht verzichten). Versuchen Sie möglichst "interessante" Aussagen P_n zu finden.

Aufgabe 10:

Zeigen Sie:

(i) Ist $A \neq \emptyset$ eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, so gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Zahl $a_\epsilon \in A$, so dass $a_\epsilon > \sup A - \epsilon$ gilt.

(ii) Ist $A \neq \emptyset$ eine nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, so gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Zahl $a_\epsilon \in A$, so dass $a_\epsilon < \inf A + \epsilon$ gilt.

(iii) Sind a, b Zahlen mit der Eigenschaft $a - \epsilon \leq b \leq a + \epsilon$ für beliebiges $\epsilon > 0$, so gilt $a = b$.

Benutzen Sie diese Aussagen, um für nichtleere, beschränkte Mengen A, B und deren Summe und Produkt

$$A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}, \qquad A \cdot B := \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$

folgende Aussagen zu beweisen:

(i) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

(ii) $\sup(A \cdot B) = \sup A \sup B$, $\inf(A \cdot B) = \inf A \inf B$, falls alle Elemente von A, B nichtnegativ sind.