Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 30.11.

Aufgabe 15:

Sei $a \geq 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^m = a$ höchstens eine nicht-negative Lösung $x \in \mathbb{R}$ hat.
Zur Konstruktion einer Folge von Näherungslösungen $x_0, x_1, \ldots$ von $x^m = a$ wird folgender Algorithmus vorgeschlagen (Konstruktion der ersten vier Terme am Beispiel des Problems $x^2 = 5$):

$$0^2 = 0,\ 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9 \to x_0 = 2.$$

$$2.1^2 = 4.41,\ 2.2^2 = 4.84,\ 2.3^2 = 5.29 \to x_1 = 2.2.$$

$$2.21^2 = 4.8841,\ 2.22^2 = 4.9284,\ 2.23^2 = 5.49729,\ 2.24^2 = 5.0176 \to x_2 = 2.23.$$

$$2.231^2 = 4977361,\ \ldots,\ 2.236^2 = 4.999696,\ 2.237^2 = 5.004169 \to x_3 = 2.236.$$

Definieren Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für den Fall $x^m = a$ mathematisch präzise und beweisen Sie, dass Ihre angegebene Konstruktion für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch tatsächlich durchführbar ist. Zeigen Sie dann, dass die Folge gegen eine Lösung der Gleichung $x^m = a$ konvergiert.

Aufgabe 16:

Zeigen Sie: eine Folge (s_n) konvergiert gegen $s \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn jede Teilfolge von (s_n) eine gegen s konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 17:

Sei $N \in \mathbb{N}$, seien (s_n), (t_n) beliebige Folgen in $\mathbb{R}$ und (r_n), (p_n) beschränkte Folgen. Zeigen Sie:

(i) $\liminf s_n = -\limsup(-s_n)$

(ii) $\liminf s_n \leq \liminf t_n$, $\limsup s_n \leq \limsup t_n$, falls $s_n \leq t_n$ für alle $n > N$

(iii) $\liminf(s_n + r_n) \geq \liminf s_n + \liminf r_n$, $\limsup(s_n + r_n) \leq \limsup s_n + \limsup r_n$

(iv) $\limsup(p_n r_n) \leq \limsup p_n \limsup r_n$, falls $p_n, r_n \geq 0$

Geben Sie in den Fällen (iii) und (iv) Beispiele von Folgen an, für die jeweils die strikte Ungleichung gilt.