Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 07.12.

Aufgabe 18:

Ausgehend von einer Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir $t_n = (s_1 + s_2 + \cdots + s_n)/n$. Zeigen Sie:

(i) Wenn (s_n) konvergiert, dann konvergiert auch (t_n). Wie lautet der Grenzwert von (t_n) in diesem Fall?

(ii) Ist (s_n) periodisch (d.h. es existiert ein $p \in \mathbb{N}$, so dass $s_{n+p} = s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$), so konvergiert (t_n).

(iii) Es ist möglich, dass (s_n) divergiert aber (t_n) konvergiert.

(iv) Es ist möglich, dass (s_n) und (t_n) beschränkt sind und divergieren.

Aufgabe 19:

Eine nichtleere Menge D heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to D$ gibt, d.h. wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (und $D \neq \emptyset$ heißt überabzählbar, wenn D nicht abzählbar ist). Zeigen Sie durch Angabe von Folgen die Abzählbarkeit der Mengen

$$D = \{a_1, \dots, a_n\}, \qquad D = \mathbb{N}, \qquad D = \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie außerdem: ist $\mathcal{D} = \{D_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Menge von abzählbaren Mengen D_i, so ist die Vereinigung aller Mengen D_i wieder abzählbar. (Hinweis: benutzen Sie einen ähnlichen Trick wie in der Vorlesung beim Abzählen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$).

Aufgabe 20:

Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $s_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = L \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie $\lim_{n\to\infty} |s_n| = \infty$, falls $L > 1$.

Aufgabe **: … hier gibt's Sterne statt Punkte

Sei $(s^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von konvergenten Folgen $s^{(i)} = (s_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$, die in der d_0-Metrik gegen eine Folge s konvergiert (wobei $d_0(s,t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n - t_n|$ für zwei Folgen s, t). Zeigen Sie, dass dann auch s konvergiert und

$$\lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_n^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \lim_{i\to\infty} s_n^{(i)}$$

(d.h. die konvergenten Folgen bilden eine bezüglich der Metrik d_0 abgeschlossene Teilmenge in der Menge der beschränkten Folgen).