Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

WS 2001/02-6

Übung ***Analysis I***

Rückgabe: 12:00, Freitag 14.12.

Aufgabe 21:

Bei der Definition von Cauchyfolgen (s_n) ist es wichtig, bei gegebenem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ zu finden, so dass **für alle** $n, m > N$ die Abschätzung $|s_n - s_m| < \epsilon$ gilt. Zeigen Sie:

(i) Ist (s_n) eine beschränkte Folge mit der Eigenschaft: für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein N, so dass $|s_{n+1} - s_n| < \epsilon$ für alle $n > N$, so muss (s_n) nicht konvergieren.

(ii) Eine beschränkte Folge (s_n) muss nicht einmal konvergieren, wenn für ein $N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|s_{n+1} - s_n| < 1/n$ für alle $n > N$ gilt.

(iii) Fordert man dagegen für eine Folge (s_n) die Eigenschaft, dass $|s_{n+1} - s_n| < 2^{-n}$ für alle $n > N$ mit einem festen $N \in \mathbb{N}$, so ist (s_n) konvergent.

Aufgabe 22:

Geben Sie einen Schätzwert S_N für die Partialsumme $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ an. Bestimmen Sie auch ein (möglichst kleines) $\Delta_N \geq 0$ mit der Eigenschaft $|S_N - s_N| \leq \Delta_N$. Schätzen Sie dann den Wert der Partialsumme für N aus folgender Liste:

(i) Von McDonalds verkaufte Hamburger: $2 \cdot 10^9$.

(ii) Anzahl der Ameisen auf der Erde: 10^{15}

(iii) Tassen Wasser in allen Ozeanen: $6 \cdot 10^{21}$

(iv) Atome in der Atmosphäre: $200 \cdot 10^{42}$

(v) Atome im Universum: 10^{78}

Wer am besten schätzt, bekommt einen *.

Aufgabe 23:

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle n und sei $p > 1$. Beweisen Sie, dass $\sum a_n^p$ konvergiert, falls $\sum a_n$ konvergiert.

Aufgabe 24:

Zeigen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ mit dem Trick $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ und testen Sie auf Konvergenz/Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$$