Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 21.12.

Aufgabe 25:

Die Reihe $\sum a_n$ ist genau dann absolut konvergent, wenn ihre Glieder in der Form $a_n = b_n - c_n$ geschrieben werden können, wobei $b_n, c_n \geq 0$ für alle n und die Reihen $\sum b_n$ und $\sum c_n$ konvergieren.

Aufgabe 26:

Zeigen Sie: Die Reihe $\sum a_n$ ist genau dann absolut konvergent wenn für jede beschränkte Folge (b_n) die Reihe $\sum a_n b_n$ konvergent ist.

Aufgabe 27:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|a_n| \leq M$ für alle n. Zeigen Sie:

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

(ii) Ist $a_1 \neq 0$, so gilt $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x| < \frac{|a_1|}{2M}$.

Aufgabe 28:

Die Exponentialfunktion ist durch die Reihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ definiert. Zeigen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Aufgabe 29:

Die Riemannsche Zeta Funktion

$$\zeta(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}, \qquad r > 1$$

soll bis auf eine vorgegebene Genauigkeit $\epsilon > 0$ durch die Partialsummen

$$\zeta_\epsilon(r) = \sum_{n=1}^{N(\epsilon,r)} \frac{1}{n^r}, \qquad r > 1$$

approximiert werden. Bestimmen Sie eine geeignete Funktion $(\epsilon, r) \mapsto N(\epsilon, r) \in \mathbb{N}$, so dass $|\zeta(r) - \zeta_\epsilon(r)| < \epsilon$ für alle $r > 1$ gilt. Erzeugen Sie eine grafische Darstellung von $\zeta_{0.1}$ über dem Intervall $1.3 \leq r \leq 5$ (mit einem kleinen Computerprogramm).