Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

WS 2001/02-9

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 18.01.2002

Aufgabe 34:

Sei $S \subset \mathbb{R}$ und $f : S \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie:

(i) Ist (x_n) eine Cauchyfolge mit $x_n \in S$ für alle n, so ist auch $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge.

(ii) Ist S beschränkt, so ist auch f beschränkt.

Aufgabe 35:

Benutzen Sie die $\epsilon - \delta$ Bedingung zum Nachweis, dass folgende Funktionen gleichmäßig stetig sind:

$$f(x) = 3x + 11, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty), \qquad f(x) = x^4, \quad x \in [0, 2].$$

Aufgabe 36:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $|f(x)| \leq c|x| + d$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 37:

Sei $(\mathbb{M}, d_{\mathbb{M}})$ ein metrischer Raum und seien $f, g : S \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetige, reellwertige Funktionen auf $S \subset \mathbb{M}$. Zeigen Sie, dass $f + g$ ebenfalls gleichmäßig stetig auf S ist. Beweisen Sie entsprechende Aussagen auch für $f \cdot g$ und f/g – wenn nötig, können Sie zusätzliche Annahmen an die Funktionen stellen.

Aufgabe 38:

Zeigen Sie: f ist stetig auf $(a, b) \subset \mathrm{dom}(f)$ genau dann, wenn $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$ für alle $\bar{x} \in (a, b)$.