Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 24. Okt., WS 2005/06
Abgabe: 31. Okt. bis 10 Uhr

Analysis I

1. Übungsblatt

Aufgabe 1: Altbekannte Rechenregeln

In der Schule werden viele Rechenregeln gelernt und verwendet, ohne sich um das *Warum* zu kümmern. Zwar läßt sich die eine oder andere Regel anschaulich motivieren (z.B. die Faustregel *Minus Minus ergibt Plus*, da es egal ist, ob man jemandem Schulden erläßt oder Geld schenkt), dennoch wird man schnell auf Schwierigkeiten bei einer tieferen Begründung stoßen. Die Körper- und Anordnungsaxiome der reellen Zahlen bieten eine Möglichkeit, dieses "mulmige Gefühl" abzubauen oder zumindest deutlich zu verringern. Aus wenigen Aussagen (Axiomen), die intuitiv richtig erscheinen und nicht hinterfragt werden können, sollen so viele Rechenregeln wie möglich durch logisches Schlußfolgern abgeleitet werden.

Beweisen Sie die folgenden (Un-)Gleichungen für reelle Zahlen unter genauer Angabe der Umformumgsschritte bzw. der verwendeten Körper- und Anordnungsaxiome:

i) $x + (-y) = x - y$ (Plus Minus gleich Minus)

ii) $x - (-y) = x + y$ (Minus Minus gleich Plus)

iii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ (Minus mal Minus gleich Plus mal Plus)

iv) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ (Durch einen Bruch teilen heißt mit seinem Kehrwert malnehmen)

v) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ (Additionsgesetz der Bruchrechnung, **nicht** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$!)

vi) $a < b \quad \wedge \quad c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$ (Addition von Ungleichungen)

vii) $x < y \quad \Rightarrow \quad -x > -y$ (Umdrehen der Ungleichung bei Multiplikation mit -1)

viii) $0 \leq x \cdot x = x^2$ (Quadrate sind stets nicht-negativ)

ix) $0 < x \quad \Rightarrow \quad 0 < x^{-1}$ (Konstanz des Vorzeichens bei Kehrwertbildung)

x) $0 < x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < y^{-1} < x^{-1}$ (Umdrehen der Ungleichung bei Kehrwertbildung)

Zeigen Sie, daß aus viii) die konkrete Ungleichung $0 < 1$ folgt. Beweisen Sie abschließend die für viele Schülergenerationen "verhängnisvolle" Ungleichung der Bruchrechnung

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \, ,$$

wobei anzunehmen ist, daß $a, b, c, d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Aufgabe 2: Irrationalität von Quadratwurzeln

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, so ist $\sqrt{p}$ *irrational.*

b) Wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist, so ist $\sqrt{n}$ entweder *natürlich* oder *irrational.*

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \in \mathbb{N} \ \vee \ \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Tip: Es genügt zu zeigen, daß es keine (echte) *rationale* Zahl $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ gibt mit $q^2 \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: Einige Ungleichungen

Das tägliche Brot (Rechnen) eines angewandten Analytikers besteht oftmals darin, bestimmte Abschätzungen (Ungleichungen) nachzuweisen. Dies mag zur Motivation gereichen, sich auf diesem Gebiet frühzeitig zu üben; denn je mehr Ungleichungen man kennt, desto besser ist das Handwerkszeug auf das man später zurückgreifen kann.

a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \neq 0$ gilt:

$$\text{i)} \quad 2|ab| \;\leq\; \epsilon^2 a^2 + \tfrac{1}{\epsilon^2} b^2 \qquad\qquad \text{ii)} \quad (a+b)^2 \;\leq\; (1+\epsilon^2)a^2 + (1+\tfrac{1}{\epsilon^2})b^2$$

b) Für $x > 0$ gilt: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

c) Für $a, b, c, d \geq 0$ zeige man:

$$\text{i)} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \qquad \text{ii)} \quad \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd \qquad \text{iii)} \quad \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$$

Interpretieren Sie die Ungleichungen. **Tip:** Führen Sie ii) auf i) und iii) auf ii) zurück, indem Sie d geschickt wählen.

Aufgabe 4: Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen

Welche natürlichen Zahlen lassen sich als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen schreiben. Beweisen Sie Ihre Aussage. (Beispiel: $88 = 3 + 4 + ... + 12 + 13$)

Aufgabe 5: Differenzen zweier nicht benachbarter Dreieckszahlen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n'te Dreieckszahl gegeben durch $T_n := \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$. Welche Zahlen lassen sich als Differenzen zweier nicht benachbarter Dreieckszahlen darstellen? Begründen Sie Ihre Aussage.

Allgemeiner Hinweis: Zu der Vorlesung Analysis I bzw. insbesondere zu den Übungen gibt es eine Homepage, die Sie unter der folgenden Adresse aufrufen können:

`http://www.math.uni-konstanz.de/~rheinlae`

Klicken Sie auf *Lehre*, und dann in der Rubrik *Wintersemester 2005/06* auf *Analysis 1.* Da die Aufgabenblätter nicht regelmäßig für alle ca 200 Teilnehmer der Vorlesung vervielfältigt werden können, wird das wöchentliche Aufgabenblatt als PDF-Dokument im Laufe eines jeden Montags unter der oben angegebenen Adresse ins Internet gestellt. Bitte drucken Sie sich das Aufgabenblatt selbständig aus.
Die Abgabe der Lösungen erfolgt am darauffolgenden Montag, wobei Sie ihre zusammengehefteten Ausarbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeordneten Kasten werfen, welcher sich gegenüber vom Dekanat befindet. Beachten Sie insbesondere die *Hinweise* und *Reglements*, welche das Bearbeiten der Übungsaufgaben anbetreffen (siehe Homepage).